Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt von

Stephan Pietrkowski
aus Freiburg i. B.

Tag der mündlichen Prüfung 13. V. 1931.

31:124

Referent: Universitätsprofessor Dr. W. Krull

Dekan: Universitätsprofessor Dr. Pummerer.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus Mathematische Annalen, Band 104 Heft 4.

Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen.

Von

St. Pietrkowski in Göttingen.

Literaturverzeichnis.

R. Baer, Zur Topologie der Gruppen, Crelle **160**, 4 (zitiert als B.).

W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen Normalkörper, Math. Annalen **100** (zitiert als K.).

v. Neumann, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Szegeder Berichte 2, 4.

H. Prüfer, Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen, 1, 2, Math. Zeitschr. **20** und **22** (zitiert als P 1, P 2).

H. Prüfer, Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Annalen **94** (zitiert als PZ).

Einleitung[1]).

Diese Arbeit setzt sich zum Ziel, einen Satz über Zerlegung in direkte primäre Summanden des Ranges 1 und zugehörigen Isomorphiesatz für unendliche Abelsche Gruppen aufzufinden, der dem bekannten Basissatz für endliche Abelsche Gruppen entspricht.

Nachdem engere spezielle Fälle von unendlichen Abelschen Gruppen von F. Levi und H. Prüfer untersucht worden waren, schuf H. Prüfer dann die entscheidenden Methoden für die Untersuchung des allgemeinen Problems in P 1 und P 2. Er erkannte, daß ein Zerlegungssatz für beliebige Abelsche Gruppen sich nicht aufstellen läßt, und legte seinen Untersuchungen eine gewisse Sonderklasse, seine sogenannten idealen Gruppen zugrunde. Diese Klasse ist, wie er zeigte, immerhin so allgemein, daß man jede beliebige Abelsche Gruppe in eine ideale einbetten kann. Es gelang Prüfer, die Zerlegung idealer Gruppen mit endlich vielen direkten Summanden zu

[1]) Diese Arbeit hat im Mai 1930 der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen als Inauguraldissertation vorgelegen. Meinem Lehrer Herrn W. Krull bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit wie für die unermüdliche Unterstützung bei Abfassung derselben zu größtem Dank verpflichtet.

erhalten und Methoden zu entwickeln, die uns hier nach leichter Verallgemeinerung im allgemeinsten Falle zum Ziele führen.

Wir wählen eine etwas andere Darstellung als Herr Prüfer. Nach bekannten Mustern[2]) stellen wir eine unendliche Abelsche Gruppe als topologischen Punktraum dar, indem wir jedes Gruppenelement als einen Punkt auffassen und gewisse Untergruppen (sie gehören zu den Prüferschen „großen Untergruppen") mit ihren Restklassen zu Umgebungen machen. Dabei können, je nach Wahl des Untergruppensystems, wesentlich verschiedene (nicht homöomorphe) topologische Räume entstehen. Prüfers ideale Gruppen haben dann als topologische Punkträume eine Abgeschlossenheitseigenschaft, die sich ungefähr mit der Eigenschaft kompakter Räume vergleichen läßt[2a]). Doch ist diese Eigenschaft insoforn eine relative, als sie von der Wahl des Untergruppensystems, also von der gewählten Topologisierung abhängt. Eine Gruppe kann nach einem Untergruppensystem, also bei einer gewissen Topologisierung, abgeschlossen sein, einen kompakten Raum bilden; nach einem andern System nicht.

Wir bezeichnen die idealen Gruppen wegen ihrer topologischen Eigenschaft in dieser Arbeit als abgeschlossene Gruppen. Die topologische Wendung läßt die wichtigen Sondereigenschaften der abgeschlossenen (= idealen) Gruppen klarer zutage treten.

Bei zweckmäßiger Übertragung der Begriffe zyklische Gruppe, Ordnung, direkte Summe, insbesondere Einführung unendlicher Summen von Gruppenelementen[3]) gelangt man zu dem gesuchten Zerlegungssatz.

Betrachtet man gewöhnliche Abelsche Gruppen als verallgemeinerte Abelsche Gruppen[4]) mit ganzrationalem Operatorenbereich, so läßt sich bei den abgeschlossenen Gruppen der Operatorenring auf „natürliche Weise"

---

[2]) Vgl. PZ, v. Neumann, Zur Theorie der Prüferschen idealen Zahlen, B., K.

[2a]) Es ist die Eigenschaft der Bikompaktheit. Vgl. P. Alexandroff, Math. Annalen **92**, S. 260.

[3]) Die Einführung unendlicher Summen von Gruppenelementen geht nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn G. Köthe parallel zu dessen Einführung unendlicher Summen von Ringelementen in transzendent vollreduziblen Ringen. (Vgl. Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, Math. Annalen **103** (1930), S. 545–572.) Doch während Herr Köthe auf diesen Begriff die Definition unendlicher direkter Summen von Ringen stützt, müssen wir die Definition unendlicher direkter Summen von Gruppen anders fassen (vgl. Def. 3, § 3), um sicher zu sein, daß wir wieder eine abgeschlossene Gruppe erhalten. Wir weisen dann nachträglich die Äquivalenz unserer Definition mit der Kötheschen nach (Satz 3, § 3).

[4]) Verallgemeinerte Abelsche Gruppen sind Abelsche Gruppen, bei denen für alle Elemente distributive Operatoren erklärt sind. Vgl. W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Heidelberger Sitzungsberichte oder die Wiedergabe bei Haupt, Algebra S. 617.

abschließen zum Ring der ganzen g-adischen[5]) Zahlen, den man genau so wie die abgeschlossenen Gruppen erhält, wenn man nach Prüfer-v. Neumannschem Vorbild[6]) auf die Gruppe der ganzen rationalen Zahlen ebenfalls die Topologie anwendet.

Die abgeschlossenen Gruppen, die durch den Zerlegungssatz einen einfachen Aufbau erhalten, sind auch mathematisch wichtig. Es sind gerade die, von denen W. Krull in K. gezeigt hat, daß sie allein in der Theorie der unendlichen relativ-Abelschen Körper eine Rolle spielen. Auf diesen Punkt gedenke ich später einmal zurückzukommen.

Wir wollen noch einen kurzen Überblick über die Anordnung im einzelnen geben. In § 1 werden zum großen Teil aus P 1 bekannte Tatsachen über große Untergruppen abgeleitet. In § 2 werden die abgeschlossenen Gruppen topologisch gekennzeichnet und ihre Eigenschaften behandelt. § 3 enthält die Definition des direkten Durchschnitts und der direkten Summe, ferner zwei Sätze über die Äquivalenz dieser Begriffe und einen für die Behandlung allgemeinster abgeschlossener Gruppen fundamentalen Konstruktionssatz. § 4 bis 6 enthalten gruppentheoretische Überlegungen: Die Zerlegung in direkte primäre Summanden, die Konstruktion direkter Summanden des Ranges 1, die den endlichen zyklischen Summanden entsprechen. § 7 enthält den Beweis des Zerlegungssatzes, § 8 den des Isomorphie- und Auswechselsatzes[6a]). Hiermit ist die allgemeine Theorie der abgeschlossenen Gruppen erledigt. Es bleiben noch drei wichtige Fragen offen. Erstens: Wie verhalten sich die nichtabgeschlossenen Gruppen zu den abgeschlossenen? Wir zeigen in § 9, daß man zu jeder beliebigen unendlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ eine abgeschlossene Hülle $\mathfrak{H}$ konstruieren kann, d. h. eine abgeschlossene Obergruppe, die aus lauter Häufungspunkten von $\mathfrak{G}$ besteht. Die Konstruktion ist i. allg. auf mehrere Weisen möglich. Wir untersuchen und beantworten daher zweitens in § 9 die Frage: Wie verhalten sich alle verschiedenen abgeschlossenen Hüllen von $\mathfrak{G}$ zueinander? Es wird sich ergeben, daß sie alle zu Quotientengruppen einer „größten" unter ihnen isomorph sind. Schließlich geben wir in § 10 noch ein Beispiel einer Gruppe, die bei zwei verschiedenen Topologisierungen als abgeschlossener topologischer Raum anzusehen ist, und zeigen, daß aber wenigstens bei geeigneter Festlegung des Operatorenbereiches die Zerlegungen der Gruppe

---

[5]) Unter dem Ring der g-adischen Zahlen soll der Ring der zu den rationalen Zahlen gehörigen idealen Zahlen (PZ) verstanden werden, *nicht* wie bei Hensel der der formalen Potenzreihen in g.

[6]) Vgl. PZ. Die Umgebungen sind hier die Gruppen der durch eine feste ganze rationale Zahl teilbaren Elemente und deren Restklassen.

[6a]) Von hier bis zum Ende des Absatzes bei der Korrektur (November 1930) zugefügt.

bis auf Isomorphie identisch sind. Als Anhang bringen wir ein Beispiel einer nicht abgeschlossenen und nicht zerlegbaren Gruppe und schließen diese dann nach dem Vorbilde von § 9 ab.

Die Definitionen dieser Arbeit stammen mit Ausnahme der topologischen Fassung und der unendlichen direkten Summe schon von Prüfer (P 1 und P 2). Die Sätze aus den Paragraphen 1, 4, 5, 6 sind zum Teil ebenfalls von Prüfer, insbesondere der ganze § 6 mit Ausnahme des Hilfssatzes. Die mitgeteilten Beweise sind mit Ausnahme der des § 6 fast alle neu. In § 6 glaubten wir des Zusammenhangs halber die Prüferschen Konstruktionen und Beweise noch einmal anführen zu müssen.

Bezeichnungen.

In dieser Arbeit werden Gruppen additiv geschrieben. Das Zeichen für die Gruppenverknüpfung ist also $+$. Das Nullelement bezeichnen wir mit ω. Für die Anwendung eines Operators verwenden wir das Zeichen $\cdot$. Unter der Vereinigungsgruppe einer Menge von Untergruppen einer Gruppe verstehen wir die Gruppe der Summen aus je einem Element aus je endlich vielen Gruppen der Menge. Unter der durch das Element α repräsentierten Restklasse[7]) einer Untergruppe $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$: $(\alpha + \mathfrak{F})$ verstehen wir die Gesamtheit der Elemente, die Summe aus α und einem Element von $\mathfrak{F}$ sind. Diese Elemente sind alle Lösungen der Kongruenz

$$\xi \equiv \alpha \ (\mathfrak{F}), \quad \text{d. i.} \quad \text{mod}\,\mathfrak{F},$$

wo α ein beliebiges Element der Restklasse ist. Die Vereinigungsgruppe heißt direkte Summe von endlich vielen Gruppen, wenn jede Gruppe mit der Vereinigungsgruppe aller übrigen nur ω zum Durchschnitt hat.

§ 1.

Große Untergruppen[8]).

Ein wichtiges Hilfsmittel der Untersuchungen der folgenden Abschnitte werden die großen Untergruppen sein. Wir führen diesen Begriff hier für verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit ganz rationalem Operatorenring = gewöhnliche Abelsche Gruppen ein, obwohl die folgenden Sätze sich für jeden kommutativen Operatorenring mit Hauptidealzerlegung beweisen lassen.

Wie immer bei verallgemeinerten Abelschen Gruppen, sollen als Untergruppen nur die gewöhnlichen Untergruppen betrachtet werden, deren Operatorenbereich mit dem der Gesamtgruppe identisch ist. Die Begriffe

[7]) Restklasse = Nebenschar = Nebengruppe.

[8]) Alle Sätze bis auf Satz 5 stammen aus P 1. Die Beweise, die angegeben sind, sind neu, die anderen sehe man in P 1, S. 181/182 nach. Der Prüferschen Definition der großen Untergruppen haben wir eine andere Fassung gegeben.

„Summe zweier Gruppen", „Restklasse nach einer Untergruppe" übertragen sich sofort auf verallgemeinerte Abelsche Gruppen. Es gilt auch hier die fundamentale Beziehung

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,|\,\mathfrak{B} \longleftrightarrow \mathfrak{A}\,|\,(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}).\ ^{9})$$

Wir definieren nun

$\mathfrak{F}$ ist eine große Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn jede Untergruppenkette

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{F}\ ^{9})$$

endlich ist, d. h. wenn in $\mathfrak{G}\,|\,\mathfrak{F}$ der Untergruppenkettensatz gilt.

Z. B. sind alle Untergruppen von endlichem Index große Untergruppen.

Für große Untergruppen gelten folgende Sätze:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{F}$ große Untergruppe von $\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{H}$ große Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}$ große Untergruppe von $\mathfrak{G}$.*

Ist nämlich $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}_0\supset\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{A}_2\supset\ldots\supset\mathfrak{F}$ irgendeine endliche oder unendliche Kette, so bilden wir $\mathfrak{A}_i\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{B}_i$, dann ist

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{B}_0\supseteq\mathfrak{B}_1\supseteq\mathfrak{B}_2\supseteq\ldots\supseteq\mathfrak{F}.$$

In dieser Kette kann es nach Voraussetzung nur endlich viele verschiedene Glieder geben. Es gibt aber auch nur endlich viele gleiche. Denn ist $\mathfrak{B}_n=\mathfrak{B}_{n+1}=\ldots$, so bedeute $\mathfrak{C}_n=\mathfrak{A}_n+\mathfrak{H}$, dann ist $\mathfrak{C}_n\,|\,\mathfrak{H}\longleftrightarrow\mathfrak{A}_n\,|\,\mathfrak{B}_n$. Wegen $\mathfrak{A}_n\supset\mathfrak{A}_{n+1}\supset\ldots$ und $\mathfrak{B}_n=\mathfrak{B}_{n+1}=\ldots$ gibt es in $\mathfrak{A}_n\,|\,\mathfrak{B}_n$ eine absteigende Kette $\mathfrak{A}_n\,|\,\mathfrak{B}_n\supset\mathfrak{A}_{n+1}\,|\,\mathfrak{B}_n\supset\ldots$. Dann gibt es aber wegen der Isomorphie auch eine absteigende Kette $\mathfrak{C}_n\,|\,\mathfrak{H}\supset\mathfrak{C}_{n+1}\,|\,\mathfrak{H}\supset\ldots$. Diese muß nach Voraussetzung endlich sein, also auch die der $\mathfrak{B}_i$, also auch die der $\mathfrak{A}_i$, w. z. b. w.

Satz 2. *Der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen ist selbst eine große Untergruppe.*

Satz 3. *Ist $\mathfrak{G}_1$ große Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$ beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_1$ große Untergruppe von $\mathfrak{F}$.*

Denn $\mathfrak{G}\,|\,\mathfrak{G}_1$ ist Obergruppe von $(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{F})\,|\,\mathfrak{G}_1\longleftrightarrow\mathfrak{F}\,|\,\mathfrak{F}_1$. Da $\mathfrak{G}_1$ große Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und damit von $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{F}$, so ist es $\mathfrak{F}_1$ von $\mathfrak{F}$.

Ist $\mathfrak{E}$ eine Gruppe derart, daß ein Element ε in allen ihren Untergruppen vorkommt, so heiße $\mathfrak{E}$ durch das Element ε beherrscht.

Satz 4. *$\mathfrak{E}$ ist entweder eine endliche zyklische Gruppe von der Ordnung p^k (k endlich, p Primzahl) oder vom Typus der Additionsgruppe der rationalen Brüche, in deren Nennern alle Potenzen der Primzahl p vorkommen,* mod 1 *reduziert, ω ist also immer eine große Untergruppe.*

---

[9]) $\cap$ bedeute Durchschnitt, $\mathfrak{G}_1\supset\mathfrak{G}_2$ bedeute: $\mathfrak{G}_2$ ist echte Untergruppe von $\mathfrak{G}_1$, $\longleftrightarrow$ bedeute holoedrische Gruppenisomorphie (hier kurz Isomorphie genannt), $\mathfrak{G}\,|\,\mathfrak{F}$ Quotientengruppe (Faktorgruppe).

Satz 5. *Enthält die Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ das Element δ nicht, so gibt es eine größte $\mathfrak{F}$, aber nicht δ enthaltende große Untergruppe von $\mathfrak{H}$.*

Wir ordnen die nicht in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{H}$ wohl

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots \qquad [\sigma < \varrho]$$

($\sigma =$ Limeszahl entspricht kein α_σ).

β_1 ist das erste α_{σ_1}, für das $(\mathfrak{F} + \{\alpha_{\sigma_1}\})$, δ nicht enthält.

Ist $\tau \neq$ Limeszahl, $\mathfrak{F}_{\tau-1}$ schon gebildet, so sei β_τ das erste α_{σ_τ}, das hinter $\alpha_{\sigma_{\tau-1}}$ steht, für das $(\mathfrak{F}_{\tau-1} + \{\alpha_{\sigma_\tau}\})$ δ nicht enthält.

Ist $\tau =$ Limeszahl, so sei $\mathfrak{F}_\tau$ die Vereinigungsgruppe aller $\mathfrak{F}_\sigma$ $[\sigma < \tau]$. Da jedes Element von $\mathfrak{F}_\tau$ schon in einem $\mathfrak{F}_\nu$ $[\nu < \tau]$ enthalten ist, so enthält $\mathfrak{F}_\tau$ δ nicht. Der Prozeß bricht spätestens bei $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_\varrho$ ab. Jede Obergruppe von $\mathfrak{D}$ enthält δ, denn sie enthält mindestens ein einem α_{σ_τ} in der Wohlordnung vorangehendes Element, das selbst kein $\beta_\nu = \alpha_{\sigma_\nu}$ ist. $\mathfrak{H} \mid \mathfrak{D}$ wird durch $(\delta + \mathfrak{D})$ beherrscht, $\mathfrak{D}$ ist also große Untergruppe.

Satz 6. *Jede große Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ist Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen, deren Quotientengruppen durch ein Element beherrscht werden.*

Ist das Element δ_1 nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten, so konstruiere man nach Satz 5 eine größte δ_1 nicht enthaltende Obergruppe $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{H}$. Sind $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ schon konstruiert, und gibt es ein Element δ_{n+1} aus $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{H}_n$, das nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten ist, so konstruiere man eine größte δ_{n+1} nicht enthaltende Obergruppe $\mathfrak{H}_{n+1}$ von $\mathfrak{H}$. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, weil $\mathfrak{H}$ große Untergruppe ist. Dann ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{H}_m.$$

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt leicht

Satz 7. *Ist $\mathfrak{F}$ große Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{F}$ eine abzählbare Gruppe mit Elementen nur endlicher Ordnung.*

§ 2.

Abgeschlossene Abelsche Gruppen[10]).

Will man versuchen, den Zerlegungssatz für endliche Abelsche Gruppen auf unendliche Abelsche Gruppen zu übertragen, so zeigen schon sehr einfache Beispiele (siehe Anhang), daß dies sicher nicht für ganz allgemeine

[10]) Die Definitionen und Sätze 1 bis 7 und Hilfssatz 3 dieses Paragraphen gelten in ähnlicher Form auch für nichtkommutative Gruppen. Vgl. B., S. 220ff., wo die abgeschlossenen Hüllen der S-Gruppen ungefähr unseren abgeschlossenen Gruppen entsprechen. Sie werden sich wohl auch leicht für beliebige verallgemeinerte Abelsche Gruppen übertragen lassen.

unendliche Abelsche Gruppen möglich ist. Wir legen daher eine besondere Klasse von unendlichen Abelschen Gruppen unseren Untersuchungen zugrunde, für die wir dann die Gültigkeit eines Zerlegungssatzes im folgenden nachweisen. Es wird sich zeigen, daß jede unendliche Abelsche Gruppe in eine Gruppe unserer Sonderklasse eingebettet werden kann, so daß uns der Zerlegungssatz auch über allgemeinste Abelsche Gruppen Auskunft gibt.

Damit die Eigenschaften unserer Sonderklasse unendlicher Abelscher Gruppen — wir nennen sie abgeschlossene Gruppen — besser zur Geltung kommen, stellen wir eine unendliche Abelsche Gruppe als topologischen Punktraum dar[11]), indem wir jedes Gruppenelement zu einem Punkte machen und gewisse Untergruppen mit ihren Restklassen als Umgebungen einführen.

Wir definieren daher:

Eine abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ *ist eine Abelsche Gruppe, die folgenden Postulaten genügt*:

1. *Man kann in* $\mathfrak{G}$ *ein System von großen Untergruppen mit ihren Restklassen so auswählen, daß es ein topologisches Umgebungssystem bildet,* und daß

2. *jedes verträgliche Kongruenzensystem*[12]) *nach den großen Untergruppen dieses Systems in* $\mathfrak{G}$ *eine Lösung hat*[13]) [14]).

Hierbei soll unser Umgebungssystem gegenüber den von Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl. S. 228 aufgestellten Axiomen folgenden verschärften[14a]) Bedingungen genügen:

B′. Jede Umgebung ist Umgebung aller ihrer Punkte.

C′. Der Durchschnitt zweier Umgebungen ist selbst eine Umgebung.

1. ist für jede Abelsche Gruppe erfüllbar durch das System aller großen Untergruppen mit ihren Restklassen. Denn Axiom A ist selbstverständlich erfüllt, Offenheitsaxiom B′ ebenfalls, da jede Restklasse nach einer großen Umgebungsuntergruppe für alle ihre Elemente Umgebung ist. Durchschnittsaxiom C′ wird mit Satz 2 § 1 bewiesen. Auch das Trennungsaxiom D ist erfüllt, denn seien α, β zwei Elemente von $\gamma_\tau + \mathfrak{H}_\tau$, wo $\mathfrak{H}_\tau$ große Untergruppe ist,

[11]) Vgl. Anm. [2]).

[12]) Ein Kongruenzensystem soll verträglich heißen, wenn je endlich viele Kongruenzen eine gemeinsame Lösung haben.

[13]) Vgl. die analoge Definition der idealen Gruppen in P 2, S. 223 ff.

[14]) Die so definierten abgeschlossenen Gruppen $\mathfrak{G}$ haben die Eigenschaft, daß sie in jedem umfassenden Gruppenraum $\mathfrak{H}$ relativ abgeschlossen sind, dessen Umgebungen mit $\mathfrak{G}$ entweder eine Umgebung von $\mathfrak{G}$ zum Durchschnitt haben oder die Nullmenge, und der so beschaffen ist, daß jede Umgebung von $\mathfrak{G}$ Durchschnitt einer Umgebung von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ ist.

[14a]) Die Verschärfung ist jedoch nur eine scheinbare.

so konstruiere man nach Satz 5 § 1 eine größte $(\alpha - \beta)$ nicht enthaltende Untergruppe $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{G}$. $(\alpha + \mathfrak{H}_1) \cap (\gamma_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$, $(\beta + \mathfrak{H}_1) \cap (\gamma_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$ sind punktfremd und nach Satz 2, § 1 Umgebungen, die zudem in $(\gamma_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$ liegen.

Zu 2. ist zu bemerken, daß ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen großen Umgebungsuntergruppen sicher höchstens eine Lösung hat, weil nach 1. das Trennungsaxiom gilt.

Bei unseren Untersuchungen spielen nur gewisse Untergruppen einer abgeschlossenen Gruppe eine Rolle. Diese „abgeschlossenen" Untergruppen müssen folgendem Postulat genügen:

3. *Jede abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist im topologischen Sinne relativ $\mathfrak{G}$ abgeschlossen.*

Satz 1. *Jede relativ zur abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{F}$ ist eine abgeschlossene Gruppe, d. h. genügt den Postulaten* 1 *und* 2.

Unter dem Umgebungssystem einer abgeschlossenen Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ sind die Untergruppen $\mathfrak{F}_\sigma$ von $\mathfrak{F}$ mit ihren Restklassen zu verstehen, die Durchschnitt großer Umgebungsuntergruppen $\mathfrak{G}_\sigma$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{F}$ sind. Die $\mathfrak{F}_\sigma$ sind große Untergruppen in $\mathfrak{F}$ (vgl. Satz 3 § 1), die mit ihren Restklassen in $\mathfrak{F}$ die Umgebungsaxiome erfüllen.

Ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen $\mathfrak{F}_\sigma$ bestimmt eindeutig ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen $\mathfrak{G}_\sigma$, das daher in $\mathfrak{G}$ eine Lösung δ hat. Dieser Punkt δ ist aber ein Hp[15]) von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$, denn in jeder seiner Umgebungen kommt mindestens ein Element von $\mathfrak{F}$ vor. Also gehört δ schon zu $\mathfrak{F}$ und jedes verträgliche Kongruenzensystem nach großen Umgebungsuntergruppen von $\mathfrak{F}$ hat in $\mathfrak{F}$ eine Lösung.

Man sieht sofort, daß mit $\mathfrak{F}$ auch jede Restklasse von $\mathfrak{F}$ zugleich abgeschlossen oder nicht abgeschlossen ist. Deshalb ist im folgenden bei Abgeschlossenheit immer nur von Gruppen die Rede.

Satz 2. *Jede Umgebung ist in $\mathfrak{G}$ abgeschlossen.*

Jede Umgebung $\mathfrak{U}$ ist offen. Ebenso die Restklassen $(\alpha + \mathfrak{U})$ $[\alpha \equiv \omega \ (\mathfrak{U})]$ und deren Vereinigungsmenge $\mathfrak{V}$. Also ist $\mathfrak{U}$ Komplement der offenen Menge $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{G}$, und daher relativ $\mathfrak{G}$ abgeschlossen, also nach Satz 2 abgeschlossen[16]).

Satz 3. *Jede Obergruppe einer Umgebung $\mathfrak{U}$ und jede ihrer Restklassen $\mathfrak{W}$ ist abgeschlossen.*

[15]) Hp bedeute einen α-Punkt im Hausdorffschen Sinne, d. h. einen Punkt, in dessen jeder Umgebung mindestens ein Punkt der zugehörigen Menge liegt. Mengenlehre 2. Aufl. S. 112.

[16]) Dieser elegante Beweis stammt von B., S. 210.

$\mathfrak{U}$ ist offen, ebenso seine in $\mathfrak{W}$ enthaltenen Restklassen. Also ist $\mathfrak{W}$ offen und nach dem Schluß im Beweise von Satz 2 auch abgeschlossen.

Wir können und wollen daher unser bisheriges Umgebungssystem erweitern durch alle Restklassen nach Obergruppen unserer bisherigen Umgebungen. Das neue System ist mit dem alten äquivalent im Hausdorffschen Sinne, denn jede Umgebung des neuen Systems enthält eine Umgebung des alten Systems und umgekehrt.

Die Wichtigkeit gerade der *großen* abgeschlossenen Untergruppen ergibt sich einerseits aus der Übersichtlichkeit ihrer Quotientengruppen, andrerseits aus folgendem Satz:

Satz 4. *Jede abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{F}$ einer abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist Durchschnitt großer Umgebungsuntergruppen.*

Durchlaufe $\mathfrak{G}_\sigma$ alle (abgeschlossenen) Umgebungsuntergruppen von $\mathfrak{G}$ und bedeute $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{G}_\sigma + \mathfrak{F}$. Alle $\mathfrak{H}_\sigma$ sind nach Satz 3 auch Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$. β sei ein Element, das in allen $\mathfrak{H}_\sigma$ vorkomme. Es genüge dem verträglichen Kongruenzensysteme in $\mathfrak{G}$

$$\beta \equiv \beta_\sigma \, (\mathfrak{G}_\sigma)$$

und damit auch dem verträglichen Kongruenzensystem in $\mathfrak{G}$

$$\beta \equiv \beta_\sigma \, (\mathfrak{H}_\sigma).$$

Da β Element von $\mathfrak{H}_\sigma$ für jedes σ, so muß auch β_σ Element von $\mathfrak{H}_\sigma$ sein. Also ist $\beta_\sigma = \varphi_\sigma + \chi_\sigma$, wo φ_σ aus $\mathfrak{F}$, χ_σ aus $\mathfrak{G}_\sigma$. β genügt also dem verträglichen Kongruenzensystem in $\mathfrak{G}$

$$\beta \equiv \varphi_\sigma \, (\mathfrak{G}_\sigma).$$

Es gibt also in jeder Umgebung von β ein Element von $\mathfrak{F}$. Dann ist β aber Hp von $\mathfrak{F}$ und damit Element von $\mathfrak{F}$. Die $\mathfrak{H}_\sigma$ haben also genau $\mathfrak{F}$ zum Durchschnitt.

Aus dem Beweise von Satz 4 folgt sofort

Satz 5. *Die Gruppe $\mathfrak{F}$ sei eine abgeschlossene Untergruppe der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$. Dann ist die Gruppe $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{F}$ abgeschlossen hinsichtlich des Umgebungssystems aus allen $\mathfrak{H}_\sigma \mid \mathfrak{F}$ und ihren Restklassen, wo $\mathfrak{H}_\sigma$ alle Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$ durchlaufe, die Obergruppen von $\mathfrak{F}$ sind.*

Satz 6. *Die Summe endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Gruppen ist abgeschlossen.*

Für den Durchschnitt behauptet der Satz eine bekannte topologische Tatsache. Sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ abgeschlossene Gruppen, so sind es auch $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ und nach Satz 5 $\mathfrak{G}_1 \mid \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$. Wegen $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) \mid \mathfrak{G}_2 \leftrightarrow \mathfrak{G}_1 \mid \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ ist $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) \mid \mathfrak{G}_2$ abgeschlossen hinsichtlich der Umgebungen, die Umgebungen

von $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ sind und $\mathfrak{G}_2$ enthalten. Da jeder Hp von $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)$, der nicht Hp von $\mathfrak{G}_2$ ist, also nicht zu $\mathfrak{G}_2$ und damit zu $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)$ gehört, einen Hp von $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) | \mathfrak{G}_2$ repräsentiert, ist $(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2)$ abgeschlossen.

Unser Umgebungssystem $\mathfrak{S}$ enthält alle bezüglich $\mathfrak{S}$ abgeschlossenen großen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Denn diese sind nach Satz 4 Durchschnitt großer Umgebungsuntergruppen von $\mathfrak{S}$. Sie sind sogar schon Durchschnitt endlich vieler, weil sie große Untergruppen sind, und daher nach Umgebungsaxiom C′ schon in $\mathfrak{S}$. Unser Umgebungssystem ist also in gewissem Sinne maximal.

Mit Hilfe dieser Sätze können wir nun die fundamentale Eigenschaft einer abgeschlossenen Gruppe und ihrer abgeschlossenen Untergruppen herleiten, von der im folgenden immer wieder Gebrauch gemacht wird.

Satz 7. *Jedes verträgliche Kongruenzensystem nach abgeschlossenen Untergruppen einer abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ hat in $\mathfrak{G}$ mindestens eine Lösung.*

Denn man kann aus diesem System nach Satz 4 ein verträgliches Kongruenzensystem nach Umgebungsuntergruppen von $\mathfrak{G}$ ableiten, das nach Postulat 2 mindestens eine Lösung in $\mathfrak{G}$ hat.

Eine feinere Eigenschaft der verträglichen Kongruenzensysteme nach beliebigen abgeschlossenen Untergruppen zeigt uns folgender oft zu verwendender

Hilfssatz 1. *Durchlaufe $\mathfrak{F}_\sigma$ ein System abgeschlossener Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$, das die Eigenschaft hat, mit je endlich vielen Gruppen auch deren Durchschnitt zu enthalten. Und sei*

$$\xi \equiv \alpha_\sigma \ (\mathfrak{F}_\sigma)$$

ein verträgliches Kongruenzensystem nach allen $\mathfrak{F}_\sigma$, in dem die α_σ aus einer abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{A}$ gewählt werden können, dann hat das Kongruenzensystem mindestens ein Element von $\mathfrak{A}$ zur Lösung.

Nach Satz 7 hat das Kongruenzensystem in $\mathfrak{G}$ überhaupt eine Lösung. Sind

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \alpha_{\sigma_1} \ (\mathfrak{F}_{\sigma_1}) \\ &\cdots\cdots \\ \xi &\equiv \alpha_{\sigma_n} \ (\mathfrak{F}_{\sigma_n}) \end{aligned}$$

beliebige endlich viele Kongruenzen des Systems, so haben diese nach Voraussetzung eine Lösung. Eine solche ist, wenn $\mathfrak{F}_{\tau_n} = \mathfrak{F}_{\sigma_1} \cap \mathfrak{F}_{\sigma_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{F}_{\sigma_n}$ bedeutet, das Element α_{τ_n} aus $\mathfrak{A}$, das auf der rechten Seite der Kongruenz

$$\xi \equiv \alpha_{\tau_n} \ (\mathfrak{F}_{\tau_n})$$

des Systems steht. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau_n} - \alpha_{\sigma_i} &\equiv \omega \ (\mathfrak{F}_{\sigma_i}) \\ \alpha_{\tau_n} - \alpha_{\sigma_i} &\equiv \omega \ (\mathfrak{A}) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Also auch

$$\alpha_{\tau_n} - \alpha_{\sigma_i} \equiv \omega \ (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}_{\sigma_i}).$$

Wir bezeichnen die abgeschlossenen Gruppen $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}_\sigma$ mit $\mathfrak{A}_\sigma$. Das Kongruenzensystem in $\mathfrak{A}$

$$\xi \equiv \alpha_\sigma \ (\mathfrak{A}_\sigma)$$

ist nach dem Vorhergehenden dann verträglich, denn α_{τ_n} ist eine gemeinsame Lösung von

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \alpha_{\sigma_1} \ (\mathfrak{A}_{\sigma_1}) \\ \xi &\equiv \alpha_{\sigma_2} \ (\mathfrak{A}_{\sigma_2}) \\ &\cdots\cdots \\ \xi &\equiv \alpha_{\sigma_n} \ (\mathfrak{A}_{\sigma_n}) \end{aligned}$$

in $\mathfrak{A}$. Nach Satz 7 hat daher das Kongruenzensystem eine Lösung in $\mathfrak{A}$, die dann zugleich Lösung von

$$\xi \equiv \alpha_\sigma \ (\mathfrak{F}_\sigma)$$

ist, w. z. b. w.

Wir wollen nun sehen, wie die kleinste abgeschlossene Untergruppe $\{\alpha\}$ [17]) der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ aussieht, die das Element α von $\mathfrak{G}$ und seine ganzrationalen Vielfachen enthält. Dazu ist nur nötig, die Hp der Gruppe der ganzrationalen Vielfachen von α in $\mathfrak{G}$ zu suchen. Sei β ein solcher. Dann genügt er dem verträglichen Kongruenzensystem

$$\beta \equiv n_\sigma \cdot \alpha \ (\mathfrak{G}_\sigma) \qquad (n_\sigma \text{ ganzrational}), \tag{1}$$

wo $\mathfrak{G}_\sigma$ die großen Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$ durchläuft. Da $\mathfrak{G}_\sigma$ große Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist nach Satz 7, § 1 schon ein endliches Vielfaches von α in $\mathfrak{G}_\sigma$ enthalten. Sei $m_\sigma \cdot \alpha$ das kleinste. *Dann und nur dann ist* (1) *verträglich, hat also einen gesuchten Hp zur Lösung, wenn*

$$x \equiv n_\sigma \ (m_\sigma) \tag{2}$$

verträglich ist. (2) definiert aber nach PZ eine oder mehrere g-adische Zahlen $\tilde{g}$.

Die Lösung β von (1) bezeichnen wir dann mit

$$\beta = \tilde{g} \cdot \alpha.$$

Damit sind für jedes α aus $\mathfrak{G}$ alle g-adischen Vielfachen auf „natürliche Weise“ definiert. $\mathfrak{G}$ wird nun im folgenden als verallgemeinerte Abelsche Gruppe mit g-adischem Operatorenbereich aufgefaßt [17a]).

---

[17]) $\{\alpha\}$ werden wir auch als die durch das Element α erzeugte Gruppe bezeichnen.

[17a]) Man sieht sofort, daß die so definierten g-adischen Operatoren einen Ring bilden und distributiv sind.

Wenn die m_σ nicht gerade alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, so sind die $\tilde{g}$ i. a. nicht eindeutig bestimmt, sondern nur modulo der Gesamtheit aller g-adischen Zahlen, die dem Kongruenzensystem nach allen m_σ

$$y \equiv 0 \,(m_\sigma) \tag{3}$$

genügen. Sie bilden ein Ideal $\mathfrak{o}_\alpha$. Für jede Zahl aus dem Ideal $\mathfrak{o}_\alpha$ ist:

$$y \cdot \alpha = \omega .$$

Wir nennen das so definierte Ideal $\mathfrak{o}_\alpha$ die Ordnung von α [18]).

Die Ordnung von α ist in jeder abgeschlossenen Ober- und Untergruppe von $\mathfrak{G}$ dieselbe, da die Operatoren dieselben sind. Elemente α, die im üblichen Sinne eine endliche Ordnung (o_α) [19]) haben, haben sie auch nach vorstehender Definition, denn α hat (o_α) schon in der abgeschlossenen Untergruppe $\{\alpha\}$ zur Ordnung.

Satz 8. *In der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die durch α „erzeugte" Gruppe $\{\alpha\}$, die Gruppe aller g-adischen Vielfachen von α, eine abgeschlossene Gruppe.*

Satz 9. *Ist $\mathfrak{F}$ eine gewöhnliche Untergruppe der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$, die relativ $\mathfrak{G}$ abgeschlossen ist, so enthält sie mit jedem Element auch alle g-adischen Vielfachen.*

Denn mit α enthält $\mathfrak{F}$ auch die kleinste abgeschlossene Gruppe, die α enthält. Das ist aber $\{\alpha\}$, wie aus dem Beweis von Satz 8 zu sehen ist.

Hilfssatz 2. *Jede verallgemeinerte Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit g-adischem Operatorenring, in der der Untergruppenkettensatz* [20]) *gilt, in der also ω große Untergruppe ist, ist auf eine einzige Weise abgeschlossen.*

Denn was für ein Umgebungssystem auch zugrunde gelegt wird, ω ist als große Untergruppe Durchschnitt endlich vieler Umgebungsgruppen (Trennungsaxiom) und damit relativ $\mathfrak{G}$ abgeschlossen. Nach Satz 3 § 2 ist damit jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ abgeschlossen relativ $\mathfrak{G}$. Da also bei ganz beliebiger Wahl des Umgebungssystems alle Untergruppen relativ $\mathfrak{G}$ abgeschlossen sind, wählen wir eine absteigende Untergruppenkette mit ihren Restklassen als Umgebungssystem. Da diese nur endlich viele Gruppen enthält, ist jedes verträgliche Kongruenzensystem lösbar. Die Postulate 1 und 2 sind also erfüllt.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{F}$ eine abgeschlossene Untergruppe der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$, die das Element δ aus $\mathfrak{G}$ nicht enthält, so gibt es eine größte $\mathfrak{F}$, aber nicht δ enthaltende abgeschlossene Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{G}$.*

[18]) $\{\alpha\}$ ist also eine verallgemeinerte Abelsche Gruppe, deren Operatorenbereich isomorph ist zum Restklassenring des Ringes der ganzen g-adischen Zahlen nach $\mathfrak{o}_\alpha$.

[19]) (o_α) bedeutet das durch die ganze rationale Zahl o_α erzeugte Hauptideal.

[20]) Der Untergruppenkettensatz sagt aus, daß jede absteigende Kette endlich ist. Vgl. Def. § 1.

Sei $\mathfrak{H}|\mathfrak{F}$ irgendeine abgeschlossene große Untergruppe von $\mathfrak{G}|\mathfrak{F}$, die das Element $(\delta+\mathfrak{F})$ nicht enthält. Es gibt ein solches $\mathfrak{H}$, denn nach Satz 4 § 2 ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{F}$, enthält also $(\delta+\mathfrak{F})$ nicht. $\mathfrak{H}$ ist abgeschlossene große Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir konstruieren nach Satz 5 § 1 eine größte δ nicht enthaltende Obergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{H}$. Diese ist als Obergruppe einer Umgebung nach Satz 3 § 2 selbst abgeschlossen und daher die gesuchte Gruppe.

§ 3.

Direkter Durchschnitt und direkte Summe.

Wir müssen nun zwei wichtige neue Begriffe einführen: Die direkte Summe und den direkten Durchschnitt abgeschlossener Gruppen.

Definition 1[21]: $(\ldots \mathfrak{G}_\tau \ldots)$[22] *sei eine Menge abgeschlossener Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe* $\mathfrak{G}$. *Ist jedes beliebige Kongruenzensystem nach allen* $\mathfrak{G}_\tau$ *verträglich und ist* $\underset{\tau}{\Delta}\mathfrak{G}_\tau = \omega$[23], *ist also jedes Kongruenzensystem nach allen* $\mathfrak{G}_\tau$ *in* $\mathfrak{G}$ *lösbar, so soll* $\mathfrak{G}$ *der direkte Durchschnitt aller* $\mathfrak{G}|\mathfrak{G}_\tau$ *heißen*[24]:

$$\underset{\tau}{\Delta}\mathfrak{G}_\tau = \omega. \tag{1}$$

Wir führen nun neue Gruppen $\mathfrak{F}_\sigma$ ein durch

$$\underset{\tau \neq \sigma}{\Delta}\mathfrak{G}_\tau = \mathfrak{F}_\sigma. \tag{2}$$

Wegen (1) gilt dann

$$\mathfrak{F}_\sigma \cap \mathfrak{G}_\sigma = \omega. \tag{3}$$

Es ist aber auch:

$$\mathfrak{F}_\sigma + \mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{G}. \tag{4}$$

Denn genügt das Element δ von $\mathfrak{G}$ dem Kongruenzensystem:

$$\delta \equiv \delta_\tau \ (\mathfrak{G}_\tau) \quad [\ldots \tau \ldots],$$[25]

so ist dieses die Summe der gleichfalls verträglichen Kongruenzensysteme

$$\xi \equiv \omega \ (\mathfrak{G}_\tau) \quad [\tau \neq \sigma]; \quad \xi \equiv \delta_\sigma \ (\mathfrak{G}_\sigma)$$

und

$$\xi \equiv \delta_\tau \ (\mathfrak{G}_\tau) \quad [\tau \neq \sigma]; \quad \xi \equiv \omega \ (\mathfrak{G}_\sigma),$$

deren Lösungen φ_σ bzw. γ_σ Elemente von $\mathfrak{F}_\sigma$ bzw. $\mathfrak{G}_\sigma$ sind, und

$$\delta = \varphi_\sigma + \gamma_\sigma,$$

womit (4) bewiesen ist.

[21]) Vgl. P 2, S. 232.
[22]) τ durchläuft eine beliebige Indexmenge.
[23]) $\underset{\tau}{\Delta}\mathfrak{G}_\tau$ bedeutet Durchschnitt aller $\mathfrak{G}_\tau$.
[24]) Vgl. Anm. [2]).
[25]) $[\ldots \tau \ldots]$ bedeutet irgendeine Indexmenge.

$\mathfrak{F}_\sigma$ ist als Durchschnitt abgeschlossener Gruppen selbst abgeschlossen. Jede Restklasse nach $\mathfrak{G}_\sigma$ hat einen und nur einen Repräsentanten in $\mathfrak{F}_\sigma$. Irgendein Element α von $\mathfrak{G}$ genüge dem Kongruenzensystem

$$\xi \equiv \alpha_\tau \ (\mathfrak{G}_\tau) \quad [\dots \tau \dots], \tag{5}$$

wobei die α_τ aus den $\mathfrak{F}_\tau$ gewählt sein mögen. Dann wollen wir α auch bezeichnen als die unendliche Summe

$$\alpha = \sum_\tau \alpha_\tau. \tag{6}$$

Definition 2. *In der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ soll die unendliche Summe*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\tau + \dots$$

existieren, wenn es eine direkte Durchschnittszerlegung von $\mathfrak{G}$ in

$$(\dots, \mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_\tau, \dots)$$

gibt, so daß α_τ Element von $\mathfrak{F}_\tau$, wobei die $\mathfrak{F}_\tau$ dieselbe Bedeutung wie oben haben. Es ist dann α eindeutig bestimmt durch

$$\alpha \equiv \alpha_\tau \ (\mathfrak{G}_\tau).$$

Es ist also die abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorph zur Gruppe der unendlichen Summen aus je einem Element von Gruppen $\mathfrak{F}_\tau$, die durch eine direkte Durchschnittszerlegung von $\mathfrak{G}$ bestimmt sind.

Unter $\sum_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$ soll im folgenden die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe der Gruppen

$$(\dots \mathfrak{A}_\sigma, \dots) \ [\dots \sigma \dots]$$

verstanden werden. Wir nennen $\sum_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$ kurz Summe aller $\mathfrak{A}_\sigma$.

Definition 3. *Sind $(\dots \mathfrak{A}_\sigma, \dots) \ [\dots \sigma \dots]$ abgeschlossene Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ und ist $\mathfrak{G} = \sum_\sigma \mathfrak{A}_\sigma$, ist weiter $\mathfrak{A}_\sigma \cap \sum_{\pi \neq \sigma} \mathfrak{A}_\tau = \omega$, so soll $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der $\mathfrak{A}_\sigma$ heißen.*

Zur Bezeichnung der direkten Summe schreiben wir $\sum\!\!\!\!\!\!\cdot$ statt $\sum$ und $\oplus$ statt $+$.

$$\mathfrak{G} = \sum\!\!\!\!\!\!\cdot_\sigma \mathfrak{A}_\sigma.$$

Wir beweisen nun die folgenden Äquivalenzsätze für direkte Summe und direkten Durchschnitt.

Äquivalenzsatz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der Untergruppen*

$$(\dots \mathfrak{F}_\sigma \dots),$$
$$\mathfrak{G} = \sum\!\!\!\!\!\!\cdot_\sigma \mathfrak{F}_\sigma$$

und bedeutet $\mathfrak{G}_\pi$ die Gruppe

$$\mathfrak{G}_\pi = \sum_{\sigma \neq \pi} \mathfrak{F}_\sigma,$$

so ist $\mathfrak{G}$ der direkte Durchschnitt aller $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_\pi$.

Nach der Definition der direkten Summe ist immer

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\pi \bigoplus \mathfrak{F}_\pi. \tag{20}$$

Jede Restklasse von $\mathfrak{G}_\pi$ in $\mathfrak{G}$ ist durch ein einziges Element von $\mathfrak{F}_\pi$ repräsentierbar.

Je endlich viele Kongruenzen

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \alpha_{\pi_1} \ (\mathfrak{G}_{\pi_1}) \\ &\cdots\cdots \\ \xi &\equiv \alpha_{\pi_n} \ (\mathfrak{G}_{\pi_n}) \qquad\qquad (\alpha_{\pi_i} \text{ aus } \mathfrak{F}_{\pi_i}) \end{aligned} \tag{21}$$

haben die gemeinsame Lösung $\alpha_{\pi_1} \bigoplus \alpha_{\pi_2} \bigoplus \ldots \bigoplus \alpha_{\pi_n}$. Jedes Kongruenzensystem nach allen $\mathfrak{G}_\pi$ ist also verträglich und damit lösbar. Jedes Kongruenzensystem nach allen $\mathfrak{G}_\pi$ ist sogar eindeutig lösbar, denn:

$$\bigcap_\pi \mathfrak{G}_\pi = \bigcap_\pi \Big(\sum_{\varrho \neq \pi} \mathfrak{F}_\varrho \Big) = \omega, \tag{22}$$

w. z. b. w.

Äquivalenzsatz 2. *Ist die abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ direkter Durchschnitt der Gruppen*

$$(\ldots \mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_\sigma, \ldots)$$

und bedeutet

$$\mathfrak{F}_\tau = \bigcap_{\sigma \neq \tau} \mathfrak{G}_\sigma,$$

so ist $\mathfrak{G}$ die direkte Summe aller $\mathfrak{F}_\sigma$:

$$\mathfrak{G} = \sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma.$$

a) Die $\mathfrak{F}_\sigma$ bilden eine direkte Summe. Denn nach Voraussetzung ist $\mathfrak{F}_\sigma \cap \mathfrak{G}_\sigma = \bigcap_\sigma \mathfrak{G}_\sigma = \omega$. $\mathfrak{G}_\sigma$ enthält aber die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe aller $\mathfrak{F}_\tau [\tau \neq \sigma]$.

b) Jedes Element γ von $\mathfrak{G}$ ist einzige Lösung eines verträglichen Kongruenzensystems nach allen $\mathfrak{G}_\sigma$. Da $\mathfrak{G}_\sigma \bigoplus \mathfrak{F}_\sigma = \mathfrak{G}$, kann man für die rechten Seiten der Kongruenzen Elemente aus $\sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma$ wählen. Nach Hilfssatz 1 § 2 ist dann aber dies Element γ Element von $\sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma$. Also $\mathfrak{G} = \sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma$, w. z. b. w.

Direkte Summe und direkter Durchschnitt sind also vollkommen äquivalent. Daraus folgt der

Satz 3. *Die unendliche Summe von Gruppenelementen*

$$\alpha = \sum_\sigma \alpha_\sigma$$

existiert dann und nur dann, wenn es eine direkte Summenzerlegung von $\mathfrak{G}$ gibt, so daß $\mathfrak{G} = \sum_\sigma \mathfrak{F}_\sigma$ und α_σ aus $\mathfrak{F}_\sigma$.

Über die Möglichkeit, von einer Gruppe nacheinander direkte Summanden abzuspalten, gibt uns der folgende Konstruktionssatz Auskunft, der für das ganze Folgende von grundlegender Wichtigkeit ist, da er zur Konstruktion einer Zerlegung der Gruppe benutzt werden muß.

Konstruktionssatz. Sind $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_\sigma, \ldots; \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\sigma, \ldots [\sigma \leqq \varrho]$ *wohlgeordnete Mengen abgeschlossener Untergruppen der abgeschlossenen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *und ist*

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{F}_1 \\ \mathfrak{G}_1 &= \mathfrak{G}_2 \oplus \mathfrak{F}_2 \\ &\cdots\cdots \\ \mathfrak{G}_{\tau-1} &= \mathfrak{G}_\tau \oplus \mathfrak{F}_\tau \qquad (\textit{wenn } \tau \neq \textit{Limeszahl}), \\ \mathfrak{G}_\tau &= \bigwedge_{\sigma<\tau} \mathfrak{G}_\sigma; \quad \mathfrak{F}_\tau = \omega \qquad (\textit{wenn } \tau = \textit{Limeszahl}), \end{aligned}$$

so haben wir die Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma \leqq \varrho} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \bigwedge_{\sigma \leqq \varrho} \mathfrak{G}_\sigma = \sum_{\sigma \leqq \varrho} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_\varrho .$$

Den Beweis führen wir durch transfinite Induktion. Der Satz ist richtig für $\varrho = 1$. Wir nehmen an, er gelte für $\varrho < \mu$.

1. μ ist keine Limeszahl. Dann ist

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma \leqq \mu-1} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_{\mu-1} = \sum_{\sigma \leqq \mu-1} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{F}_\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu = \sum_{\sigma \leqq \mu} \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_\mu . \tag{7}$$

2. μ ist Limeszahl. Zur Abkürzung führen wir die Gruppen

$$\mathfrak{S}_\alpha^\beta = \sum_{\alpha \leqq \sigma \leqq \beta} \mathfrak{F}_\sigma \qquad [\alpha \leqq \beta \leqq \mu] \tag{8}$$

ein. Unser Satz stellt sich dann so dar:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1^\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu . \tag{9}$$

a) Wir beweisen zunächst: $\mathfrak{S}_1^\pi = \sum_{\sigma \leqq \pi} \mathfrak{F}_\sigma [\pi \leqq \mu]$ ist eine direkte Summe und damit a fortiori $\mathfrak{S}_\lambda^\pi [\lambda \leqq \pi]$. Für $\pi < \mu$ kann die Behauptung schon als bewiesen gelten: $\mathfrak{S}_1^\pi = \sum_{\sigma \leqq \pi} \mathfrak{F}_\sigma$. Dann ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{F}_\pi \oplus \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{F}_\pi \oplus (\mathfrak{S}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{G}_\pi), \tag{10}$$

also

$$\mathfrak{F}_\pi \wedge (\mathfrak{S}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{G}_\pi) = \omega \qquad [\pi < \mu]. \tag{11}$$

Nun enthält $(\mathfrak{S}_1^{\pi-1} \oplus \mathfrak{G}_\pi)$ die Gruppe $\sum_{\sigma \neq \pi}^{\sigma \leqq \mu} \mathfrak{F}_\sigma$, woraus für jedes $\mathfrak{F}_\pi$ folgt:

$$\mathfrak{F}_\pi \wedge \sum_{\sigma \neq \pi}^{\sigma \leqq \mu} \mathfrak{F}_\sigma = \omega . \tag{12}$$

$\mathfrak{S}_1^\mu$ ist also direkte Summe und wir haben die Formeln

$$\mathfrak{S}_1^\mu = \sum_{\sigma \leqq \mu} \mathfrak{F}_\sigma; \quad \mathfrak{S}_\alpha^\gamma = \mathfrak{S}_\alpha^\beta \oplus \mathfrak{S}_{\beta+1}^\gamma \quad [\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \mu]. \tag{13}$$

b) Jedes verträgliche Kongruenzensystem

$$\xi \equiv \alpha_\pi \ (\mathfrak{G}_\pi) \qquad [\pi < \mu] \tag{14}$$

ist eindeutig lösbar mod $\mathfrak{G}_\mu$, denn $\bigcap_{\pi<\mu} \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{G}_\mu$. Die α_π können, da die Richtigkeit des Satzes 1 für $\pi < \mu$ vorausgesetzt wird, aus den $\mathfrak{S}_1^\pi$ gewählt werden, d. h. jedes α_π ist aus $\mathfrak{S}_1^\mu$. Setzt man an Stelle der $\mathfrak{F}_\sigma$ die $\mathfrak{G}_\pi$, an Stelle von $\mathfrak{A}$ aber $\mathfrak{S}_1^\mu$ in unseren Hilfssatz 1 von § 2 ein, so sieht man, daß alle Elemente von $\mathfrak{G} \mid \bigcap_{\pi<\mu} \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_\mu$ durch Elemente von $\mathfrak{S}_1^\mu$ repräsentiert werden können:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1^\mu + \mathfrak{G}_\mu. \tag{15}$$

c) $\mathfrak{S}_1^\mu + \mathfrak{G}_\mu$ ist sogar eine direkte Summe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1^\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu. \tag{16} = (9)$$

Um das zu beweisen, zeigen wir zunächst

$$\mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu \qquad [\pi < \mu]. \tag{17}$$

Denn es ist ja nach a): $\mathfrak{S}_1^\mu = \mathfrak{S}_1^\pi \oplus \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$. Für jedes Element δ von $\mathfrak{S}_1^\mu$ gibt es daher eine Zerlegung: $\delta = \delta_\pi \oplus \delta_{\pi+1}$, wo δ_π, $\delta_{\pi+1}$ Elemente von $\mathfrak{S}_1^\pi$, $\mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$ sind. Soll δ zugleich zu $\mathfrak{G}_\pi$ gehören, so muß $\delta - \delta_{\pi+1} = \delta_\pi$ zu $\mathfrak{G}_\pi$ gehören, denn $\delta_{\pi+1}$ ist Element der Untergruppe $\mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$ von $\mathfrak{G}_\pi$. Dann ist aber $\delta_\pi = \omega$, da $\mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{S}_1^\pi = \omega$ nach Voraussetzung für $\pi < \mu$. Also ist $\delta = \delta_{\pi+1}$ schon in $\mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu$

$$\mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{S}_{\pi+1}^\mu. \tag{18}$$

Also ist

$$\mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\mu = \mathfrak{S}_1^\mu \cap \bigcap_{\pi<\mu} \mathfrak{G}_\pi = \bigcap_{\pi<\mu} (\mathfrak{S}_1^\mu \cap \mathfrak{G}_\pi) = \bigcap_{\pi<\mu} \Big(\sum_{\pi+1 \leqq \sigma \leqq \mu} \mathfrak{F}_\sigma \Big) = \omega, \tag{19}$$

w. z. b. w.

§ 4.

Zerlegung in primäre Summanden [26]).

Aus der Definition der unendlichen Summe ergibt sich, wenn $\alpha = \sum_\sigma \alpha_\sigma$ und $\tilde{g} \cdot \alpha = \omega$ ist, daß $\tilde{g} \cdot \alpha_\sigma = \omega$ ist für alle σ. Ist umgekehrt $\tilde{g} \cdot \alpha_\sigma = \omega$ für alle σ, so ist $\tilde{g} \cdot \alpha = \omega$. Daraus folgt

Satz 1. *Das Ordnungsideal einer unendlichen direkten Summe ist der Durchschnitt der Ordnungsideale der Summanden.*

Die Ordnung einer direkten Summe ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ordnungen der Summanden.

[26]) Die analoge direkte Durchschnittszerlegung wird schon in P 2, S. 232 bewiesen.

Wir wollen die Ordnung eines Elementes primär zu p gehörig nennen, wenn seine Ordnung ein Primärideal mit der Basis p^k $(k = 1, 2, \ldots)$ oder p^∞ ist. Eine Quotientengruppe soll primär heißen, wenn sie es als Gruppe betrachtet ist, d. h. wenn jede ihrer Restklassen primäre zu p gehörige Ordnung hat.

Hauptsatz 1. *Eine abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ ist auf eine einzige Weise so als direkte Summe von primären Gruppen $\mathfrak{F}_p$ darstellbar, daß zu jeder Primzahl höchstens eine gehört.*

Wir setzen $\mathfrak{F}_p$ gleich der Gruppe der $\tilde{e}_p$-fachen von $\mathfrak{G}$, wo $\tilde{e}_p$ die zu p gehörige Haupteinheit[27]) ist.

1. $\mathfrak{F}_p$ ist primär zu p gehörig. Denn ist $(\tilde{o})$[28]) die Ordnung eines Elementes $\alpha = \tilde{e}_p \cdot \beta$ von $\mathfrak{F}_p$, $\tilde{o}_p$ die p-Komponente von $\tilde{o}$, so ist $(\tilde{o}_p)$ Teiler von $(\tilde{o})$. Da aber schon $\tilde{o}_p \cdot \alpha = \tilde{o}_p \cdot \tilde{e}_p \cdot \alpha = \tilde{o} \cdot \alpha = \omega$ ist, so ist auch $(\tilde{o})$ Teiler von $(\tilde{o}_p)$: $(\tilde{o}) = (\tilde{o}_p)$.

2. $\mathfrak{F}_p$ ist abgeschlossen. Denn genügt der Hp β von $\mathfrak{F}_p$ dem verträglichen Kongruenzensystem

$$\beta \equiv \beta_\sigma \ (\mathfrak{G}_\sigma) \, [\ldots \sigma \ldots],$$

wo $\mathfrak{G}_\sigma$ alle Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$ durchläuft, so kann man die β_σ aus $\mathfrak{F}_p$ wählen. Die Ordnung von $(\beta_\sigma + \mathfrak{G}_\sigma)$ in $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_\sigma$ ist ein Teiler der Ordnung von β_σ, also primär zu p gehörig und zudem endlich. Es ist daher

$$p^{k_\sigma} \beta \equiv \omega \ (\mathfrak{G}_\sigma) \quad \text{(für alle } \sigma),$$

d. h. die Ordnung von β ist selbst primär.

3. gehören alle Elemente β von $\mathfrak{G}$ mit zu p gehöriger Ordnung selbst zu $\mathfrak{F}_p$. Denn es ist $\tilde{e}_p \cdot \beta = \beta$; $(1 - \tilde{e}_p) \cdot \beta = \omega$. Da nämlich $(1 - \tilde{e}_p)$ alle Komponenten 1, nur die p-Komponente 0 hat, ist $(1 - \tilde{e}_p)$ in jedem zu p gehörigen Primärideal enthalten, also Vielfaches der Ordnung von β.

4. $\sum_p \mathfrak{F}_p = \mathfrak{G}$. Denn nach PZ ist $1 \cdot \alpha = \tilde{e}_{p_1} \cdot \alpha \oplus \tilde{e}_{p_2} \cdot \alpha \oplus \ldots$. Daß die Summe direkt ist, ist klar.

Die Darstellung ist eindeutig, weil $\mathfrak{F}_p$ als Gruppe aller Elemente mit zu p gehöriger primärer Ordnung eindeutig bestimmt ist. Damit ist der Hauptsatz 1 bewiesen.

Vermöge des Äquivalenzsatzes 1 § 3 folgt:

Hauptsatz 1a. *$\mathfrak{G}$ ist auf eine einzige Art als direkter Durchschnitt primärer Quotientengruppen $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}_p$ darstellbar, von denen zu jeder Primzahl höchstens eine gehört.*

---

[27]) Vgl. PZ. Es ist $\tilde{e}_p \cdot \tilde{e}_p = \tilde{e}_p$, $\tilde{e}_p \cdot \tilde{e}_q = 0$ $(p \neq q)$.

[28]) Die Ordnung von α ist ein durch $\tilde{o}$ erzeugtes Hauptideal $(\tilde{o}) = \mathfrak{o}_\alpha$ im Ring der ganzen g-adischen Zahlen, wenn man von dessen Idealen verlangt, daß sie auch alle existierenden unendlichen Summen ihrer Elemente enthalten. Denn alle solchen Ideale sind, wie man leicht zeigen kann, immer Hauptideale.

Für jedes Element α einer zu p gehörigen primären Gruppe ist $\tilde{e}_p \cdot \alpha = \alpha$. Ist r die kleinste der Zahlen $1, 2, \ldots, \infty$, für die für *alle* Elemente α einer solchen Gruppe $p^r \cdot e_p \cdot \alpha = \omega$ gilt, so ist der Operatorenbereich einer solchen Gruppe isomorph zum Ring der ganzen p-adischen Zahlen (für $r = \infty$) oder zum Restklassenring nach p^r (für $r \neq \infty$).

§ 5.

Definitionen und Gruppentypen.

Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber nur primäre zu p gehörige Gruppen, deren Operatorenbereich, da sie Untergruppen der Gruppen $\mathfrak{F}_p$ aus dem § 4 sind, sich auf die ganzen p-adischen Zahlen reduziert.

Definition 1[29]). *Ist α ein Element der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ und k der höchste Exponent, für den die Gleichung $p^k \cdot \xi = \alpha$ in $\mathfrak{G}$ lösbar ist, so soll p^k die Höhe von α in $\mathfrak{G}$ heißen. Ist die Gleichung für jedes ganze k lösbar, so soll p^∞ die Höhe von α in $\mathfrak{G}$ heißen.*

Die Höhe der Summe zweier Elemente ist ein Vielfaches des größten gemeinschaftlichen Teilers der Höhen dieser Elemente. Die Höhe einer direkten (auch unendlichen) Summe[30]) von Gruppenelementen ist genau der größte gemeinschaftliche Teiler der Höhen der Summanden.

Definition 2[28]). *Eine abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{F}$ der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$, in der jedes Element dieselbe Höhe hat wie in $\mathfrak{G}$, soll eine Servanzuntergruppe heißen.*

Satz 1[28]). *Jeder direkte Summand $\mathfrak{F}$ einer abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$.*

Satz 1 läßt sich aber nicht umkehren. Der Begriff der Servanzgruppe ist weiter als der des direkten Summanden.

An die Stelle der zyklischen Gruppen bei den endlichen Abelschen Gruppen treten hier die Gruppen vom Range 1:

Definition 3[28]). *Eine Gruppe heißt vom Range* 1, *wenn von je zwei Elementen eines g-adisches Vielfaches des anderen ist.*

Da wir auch hier, wie im folgenden immer, nur primäre zu p gehörige Gruppen betrachten wollen, so ist schon ein Element von zweien p-adisches Vielfaches des anderen.

[29]) Vgl. P 1, S. 177.

[30]) Die unendlichen Summen müssen natürlich einen Sinn haben.

Man sieht leicht ein: In einer primären Gruppe des Ranges 1 haben alle Elemente entweder zugleich endliche Ordnung oder die Ordnung p^∞.

In einer Gruppe des Ranges 1 haben alle Elemente endliche Höhe oder die Höhe p^∞. Gibt es nämlich in der Gruppe ein Element α der Höhe p^∞ und ein Element β der Höhe 1, so muß α ein Vielfaches von β sein, etwa $\alpha = \tilde{b} \cdot \beta$. Ist nun $p^k \cdot \alpha_k = \alpha$, so müssen auch $p \cdot \alpha_1$, $p \cdot \alpha_2$, ... Vielfache von β sein, weil sie eine größere Höhe haben. Dann muß aber $\tilde{b} = p \cdot \tilde{b}_2 = p^2 \cdot \tilde{b}_3 = \ldots$ durch jede beliebige Potenz von p teilbar sein: $(\tilde{b}) = (p^\infty)$. Dann ist aber

$$\alpha = \tilde{b} \cdot \beta = \tilde{b} \cdot \tilde{e}_p \cdot \beta = 0 \cdot \beta = \omega.$$

Wir können jetzt die Gruppen vom Range 1 einteilen in:

a) Gruppen von Elementen nur endlicher Ordnung und nur endlicher Höhe. Abkürzung: $\mathfrak{Z}^{p^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

b) Gruppen von Elementen nur endlicher Ordnung und nur unendlicher Höhe. Abkürzung: $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$;

c) Gruppen von Elementen nur unendlicher Ordnung und nur endlicher Höhe. Abkürzung: $\mathfrak{Z}^{p^\infty}$;

d) Gruppen von Elementen nur unendlicher Ordnung und nur unendlicher Höhe. Abkürzung: $\mathfrak{Z}_{p^\infty}^{p^\infty}$.

Der Typus a) umfaßt alle und nur die endlichen zyklischen Gruppen von der Ordnung p^k.

Der Typus b) enthält wenigstens ein Element δ der Ordnung p. Da jedes Element der Gruppe größere oder gleiche Ordnung hat wie δ, und die durch ein Element erzeugten Untergruppen, d. h. die Gruppen der p-adischen Vielfachen eines Elementes, die einzigen sind, ist δ p-adisches Vielfaches jedes Elementes der Gruppe und kommt in jeder Untergruppe vor. Die Gruppen $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$ sind also die von einem Element beherrschten Gruppen des § 1. Sie sind alle untereinander und zur Additionsgruppe aller Brüche, in deren Nenner eine Potenz von p steht, mod 1 reduziert, isomorph.

Der Typus c) $\mathfrak{Z}^{p^\infty}$ enthält wenigstens ein Element α der Höhe 1. Die Gruppe ist dann die Gruppe aller p-adischen Vielfachen von α, die alle verschieden sind. Alle $\mathfrak{Z}^{p^\infty}$ sind daher isomorph zur Additionsgruppe der ganzen p-adischen Zahlen.

Der Typus d) $\mathfrak{Z}_{p^\infty}^{p^\infty}$ hat nur Untergruppen vom Typus $\mathfrak{Z}^{p^\infty}$. Er ist daher isomorph zur Additionsgruppe des Körpers aller p-adischen Zahlen.

Die Typen $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$, $\mathfrak{Z}^{p^\infty}$, $\mathfrak{Z}_{p^\infty}^{p^\infty}$ sind eindeutig bestimmt, der Typus $\mathfrak{Z}^{p^k}$ hat je nach der Anzahl p^k seiner Elemente abzählbar viele Möglichkeiten.

§ 6.

Konstruktion direkter Summanden vom Range 1[31]).

Für die folgenden Untersuchungen brauchen wir den

Hilfssatz 1. *Die Gruppe $p^k \cdot \mathfrak{G}$ der Elemente der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Höhe ein Vielfaches von p^k ist, ist abgeschlossen.*

Die Elemente α von $p^k \cdot \mathfrak{G}$ lassen sich darstellen als $\alpha = p^k \cdot \delta$, wo δ Element aus $\mathfrak{G}$. Durchlaufe $\mathfrak{G}_\sigma$ die Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$. Der Hp β von $p^k \cdot \mathfrak{G}$ genüge dem verträglichen Kongruenzsystem

$$\beta \equiv \alpha_\sigma \equiv p^k \cdot \beta_\sigma \ (\mathfrak{G}_\sigma) \qquad [\sigma < \varrho]. \tag{1}$$

Die Gesamtheit der Elemente β_σ, für die $p^k \cdot \beta_\sigma \equiv \alpha_\sigma \ (\mathfrak{G}_\sigma)$, bilden eine Restklasse nach $\mathfrak{G}_{\sigma k}$, der Gruppe der Elemente von $\mathfrak{G}$, deren p^k-fache in $\mathfrak{G}_\sigma$ liegen. $\mathfrak{G}_{\sigma k}$ ist als Obergruppe der Umgebung $\mathfrak{G}_\sigma$ abgeschlossen. Es gilt dann für alle solchen β_σ zugleich

$$\beta_\sigma \equiv \gamma_\sigma \ (\mathfrak{G}_{\sigma k}), \text{ mit festem } \gamma_\sigma. \tag{2}$$

Da (1) verträglich ist, hat das endliche Teilsystem

$$\begin{aligned} &\beta \equiv p^k \beta_{\sigma_1} \ (\mathfrak{G}_{\sigma_1}) \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ &\beta \equiv p^k \beta_{\sigma_n} \ (\mathfrak{G}_{\sigma_n}) \\ &\beta \equiv p^k \beta_\tau \ (\mathfrak{G}_\tau), \end{aligned} \tag{3}$$

wo $\mathfrak{G}_{\sigma_1}, \mathfrak{G}_{\sigma_2}, \ldots, \mathfrak{G}_{\sigma_n}$ beliebige endlich viele der $\mathfrak{G}_\sigma$ und $\mathfrak{G}_\tau = \mathfrak{G}_{\sigma_1} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{G}_{\sigma_n}$ gleichfalls eine Umgebung ist, eine gemeinsame Lösung. Das heißt aber

$$p^k (\beta_\tau - \beta_{\sigma_i}) \equiv \omega \ (\mathfrak{G}_{\sigma_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Daraus folgt

$$\beta_\tau \equiv \gamma_{\sigma_i} \ (\mathfrak{G}_{\sigma_i k}). \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Das Kongruenzensystem

$$\eta \equiv \gamma_\sigma \ (\mathfrak{G}_{\sigma k}) \tag{6}$$

ist also verträglich und hat daher mindestens eine Lösung γ. $\gamma \equiv \gamma_\sigma \equiv \beta_\sigma (\mathfrak{G}_{\sigma k})$ also $\gamma - \beta_\sigma = \gamma_{\sigma k}$, wo $\gamma_{\sigma k}$ aus $\mathfrak{G}_{\sigma k}$.

$$\begin{aligned} p^k (\gamma - \beta_\sigma) &= p^k \gamma_{\sigma k} = \omega (\mathfrak{G}_\sigma) \\ p^k \cdot \gamma &\equiv p^k \beta_\sigma \equiv \alpha_\sigma (\mathfrak{G}_\sigma). \end{aligned} \tag{7}$$

Also ist $p^k \cdot \gamma = \beta$ und damit β in $p^k \cdot \mathfrak{G}$, w. z. b. w.

[31]) Dieser § 6 stammt mit Ausnahme des Hilfssatzes und seiner Anwendung im Beweis von Satz 1 vollkommen aus P 1 §§ 12, 13, P 2 § 12.

Satz 1. *Zu jedem Element α einer abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es eine abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{F}$ vom Range 1, in der α dieselbe Höhe hat wie in $\mathfrak{G}$.*

Hat α die Höhe p^k und ist $p^k \cdot \beta = \alpha$, so ist $\{\beta\}$ die gesuchte Gruppe. Hat α die Höhe p^∞, so gibt es für jedes k ein Element β_k aus $\mathfrak{G}$, für das $p^k \cdot \beta_k = \alpha$. Bedeuten $p\mathfrak{G} \supset p^2\mathfrak{G} \supset \ldots$ die Gruppen der p-ten, p^2-ten, ... Vielfachen der Elemente von $\mathfrak{G}$, die nach dem Hilfssatz abgeschlossen sind, $\mathfrak{G}^p$ die selbstverständlich abgeschlossene Gruppe aller Elemente der Ordnung p, so ist das Kongruenzensystem

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\xi \equiv p^2 \cdot \beta_3 \qquad (p \cdot \mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^p) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\xi \equiv p^{n-1} \cdot \beta_n \,(p^{n-1} \cdot \mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^p) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

verträglich, denn für $m \geqq n$ ist $p^{m-1}\beta_m = p^{n-1}\beta_n\,(p^{n-1}\mathfrak{G})$, weil ja $p^{n-1}(p^{m-n}\beta_m - \beta_n)$ in $(p^{n-1}\mathfrak{G})$ ist. Es hat also mindestens eine Lösung α_1, für die noch $p \cdot \alpha_1 = \alpha$ ist. α_1 hat die Höhe p^∞, denn es ist für jedes l, wegen $\alpha_1 = p^l\beta_{l+1}\,(p^l\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^k)$, $\alpha_1 = p^l(\gamma - \beta_{l-1})$, wo γ ein geeignetes Element aus $\mathfrak{G}$ ist.

Zu α_1 konstruieren wir wie vorhin ein α_2 der Höhe p^∞, für das $p \cdot \alpha_2 = \alpha_1$ ist usw. Dann können wir

$$(9)\qquad \mathfrak{F} = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$$

setzen, wo $\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsgruppe aller $\{\alpha_i\}$[32] bedeutet. Die so konstruierten Gruppen sind nicht immer Servanzuntergruppen von $\mathfrak{G}$, doch immer in folgenden wichtigen Fällen:

Satz 2. *Zu jedem α der Ordnung p der abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es eine α enthaltende Servanzuntergruppe des Ranges* 1.

Diese ist die im Beweis von Satz 1 konstruierte Gruppe $\mathfrak{F}$.

Satz 3. *Enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ kein Element endlicher Ordnung, so ist jedes Element α in einer Servanzuntergruppe des Ranges* 1 *enthalten.*

In einer solchen Gruppe gibt es keine zwei Elemente β_1, β_2 für die $p^k \cdot \beta_1 = p^k \cdot \beta_2 = \alpha$ ist, denn $(\beta_1 - \beta_2)$ hätte ja sonst die endliche Ordnung p^k. Darum ist die Gruppe $\mathfrak{F}$ aus Satz 1 auch hier die gesuchte Gruppe. Denn entweder hat jedes Element die Höhe p^∞ oder $\mathfrak{F}$ ist $\{\beta\}$, wo β die Höhe 1 hat. Hätte $\gamma = p^r\tilde{e}\beta$ ($\tilde{e}$ Einheit) die Höhe p^s $[s > r]$, so gäbe es in $\mathfrak{G}$ ein γ_1, so daß $p^{r+1}\gamma_1 = \gamma$. Da dann $(p\gamma_1 - \tilde{e}\beta)$ von der Ordnung p^r wäre, müßte $p \cdot \gamma_1 = \tilde{e}\beta$ sein. Dann hätte β aber nicht die Höhe 1.

[32]) Vgl. Anm. [18]).

Die in den letzten beiden Sätzen konstruierten speziellen Servanzuntergruppen des Ranges 1 sind aber zugleich direkte Summanden, denn es gilt:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe des Ranges 1 von $\mathfrak{G}$, die ein Element a der Ordnung p enthält, so ist $\mathfrak{F}$ ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$.* $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} + \mathfrak{H}$.

Hat a die Höhe p^λ und ist $p^{\lambda+1}\cdot\xi = a$: β, a aus $\mathfrak{F}$, so sei $\{p^{\lambda+1}\}\cdot\mathfrak{G}$ die Gruppe der $p^{\lambda+1}$-fachen von $\mathfrak{G}$. Man suche nach Hilfssatz 3 § 2 eine größte abgeschlossene Obergruppe von $\{p^{\lambda+1}\}\cdot\mathfrak{G}$, die a nicht enthält. Sie heiße $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ wird durch $\{a \quad \mathfrak{H}\}$ beherrscht. Ist $p^\lambda\gamma_n = a$, γ_n aus $\mathfrak{F}$, so hat $\{\gamma_n \quad \mathfrak{H}\}$ in $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ genau die Ordnung p^{n+1}, denn sonst wäre $p^n\cdot p^\lambda = a$ in $\mathfrak{H}$ enthalten. $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ enthält keine Restklasse δ $\mathfrak{H}$ der Ordnung p^{n+1}, da ja $p^{\lambda+1}\delta$ in $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Da $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ zyklisch sind von derselben Ordnung p^{n+1}, und weil die Elemente von $\mathfrak{F}$ Restklassen derselben Ordnung von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ repräsentieren, so repräsentieren sie auch alle Restklassen von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} + \mathfrak{H}$. Hat a die Höhe p^∞, so kann $\mathfrak{H}$ als eine beliebige größte abgeschlossene a nicht enthaltende Untergruppe gewählt werden.

Satz 5. *Enthält die abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ kein Element endlicher Ordnung, so ist eine a enthaltende Servanzuntergruppe des Ranges 1 ein direkter Summand.*

Wird $\mathfrak{F}$ durch ein Element β der Höhe 1 erzeugt, $\mathfrak{F} = \{\beta\}$, so sei $\mathfrak{H}_s$ eine größte p^s $\mathfrak{F}$, aber nicht $p^{s-1}\beta$, also auch nicht β enthaltende abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{H}_{s-1}$: $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}_s$ wird durch $\{\beta \quad \mathfrak{H}_s\}$ erzeugt. Es sei $\prod_{k=1}^{\infty}\mathfrak{H}_k = \mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}$ enthält kein Element von $\{\beta\}$. $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ wird durch $(\beta \quad \mathfrak{H})$ erzeugt. Also ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} + \mathfrak{H}.$$

Wird $\mathfrak{F}$ nicht durch ein Element erzeugt, so sei a beliebig aus $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{H}$ erhält man wie vorher. Nur wird jetzt $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}_1$ durch $\{a \quad \mathfrak{H}_1\}$ nicht erzeugt, sondern beherrscht. $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{H}$ wird durch $\{a \quad \mathfrak{H}\}$ erzeugt.

§ 7.

Zerlegung einer abgeschlossenen Gruppe in direkte Summanden des Ranges 1.

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel gewonnen, um eine abgeschlossene Gruppe zu zerlegen. Die Zerlegung vollziehen wir in zwei Schritten.

Satz 1. *Eine abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die direkte Summe zweier Gruppen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{E}$, die abgeschlossene Hülle der Gruppe aller Elemente endlicher Ordnung von $\mathfrak{G}$, ist eindeutig. $\mathfrak{U}$, eine Gruppe von Elementen nur unendlicher Ordnung p^∞, daher bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Wir ordnen die Elemente von $\mathfrak{G}$ wohl. Am Anfang stehen alle Elemente endlicher Ordnung von $\mathfrak{G}$. Einer Limeszahl ν entspreche kein α_ν.

$$\omega = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots \qquad [\sigma < \tau].$$

Wir spalten die zu den Elementen der Ordnung p gehörigen direkten Summanden des Ranges 1 nacheinander so ab: Für $\nu < \mu$ gelte schon

$$\mathfrak{G}_{\nu-1} = \mathfrak{F}_\nu \oplus \mathfrak{G}_\nu \qquad (\text{wenn } \nu \neq \text{Limeszahl}),$$
$$\underset{\sigma<\nu}{A}\, \mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{G}_\nu; \quad \mathfrak{F}_\nu = \omega \qquad (\text{wenn } \nu = \text{Limeszahl}).$$

Ist dann α_{σ_μ} das erste Element aus den α_σ, das die Ordnung p hat und in $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ enthalten ist, so sei $\mathfrak{F}_\mu$ ein direkter Summand des Ranges 1 von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$, der α_{σ_μ} enthält. Dann ist

$$\mathfrak{G}_{\mu-1} = \mathfrak{F}_\mu \oplus \mathfrak{G}_\mu.$$

Für eine Limeszahl μ werde $\mathfrak{F}_\mu = \omega$ und $\mathfrak{G}_\mu = \underset{\sigma<\mu}{A}\, \mathfrak{G}_\sigma$ gesetzt. Dann sind die Voraussetzungen des Konstruktionssatzes § 3 erfüllt und es ist also

$$\mathfrak{G} = \sum_{\sigma \leqq \varrho}{}' \mathfrak{F}_\sigma \oplus \mathfrak{G}_\varrho = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{U},$$

wo

$$\mathfrak{E} = \sum_{\sigma \leqq \varrho}{}' \mathfrak{F}_\sigma; \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{G}_\varrho.$$

$\mathfrak{U}$ enthält nach Konstruktion nur Elemente der Ordnung p^∞. Jedes Element endlicher Ordnung ist in $\mathfrak{E}$ enthalten, denn das ist wahr für die Elemente der Ordnung p. Die Behauptung sei schon bewiesen für die Elemente der Ordnung p^k. Ist α ein Element der Ordnung p^{k+1}, so ist $p \cdot \alpha = \beta$ in $\mathfrak{E}$ enthalten. Da $\mathfrak{E}$ als direkter Summand Servanzuntergruppe ist, gibt es in $\mathfrak{E}$ ein γ, so daß $p\gamma = \beta$. $(\alpha - \gamma)$ ist dann von der Ordnung p, also in $\mathfrak{E}$. Dann ist aber auch α in $\mathfrak{E}$.

Wenn die Ordnungen der Elemente endlicher Ordnung in $\mathfrak{E}$ nicht beschränkt sind, enthält $\mathfrak{E}$ auch Häufungspunkte der Ordnung p^∞. Da $\mathfrak{E}$ eindeutig bestimmt ist, ist $\mathfrak{U}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. $\mathfrak{U} \leftrightarrow \mathfrak{G} | \mathfrak{E}$. Aus der Konstruktion folgt sofort

Satz 2. *$\mathfrak{E}$ ist die direkte Summe von Summanden des Ranges* 1.

Wir können wieder wie oben mit Hilfe von Satz 5 § 6 nacheinander direkte Summanden des Ranges 1 von $\mathfrak{U}$ abspalten. Dann folgt auch für $\mathfrak{U}$:

Satz 3. *$\mathfrak{U}$ ist die direkte Summe von Summanden des Ranges* 1.

Damit und mit Hauptsatz 1 § 4 haben wir bewiesen den

Hauptsatz 2. *Jede abgeschlossene Gruppe ist direkte Summe von primären Summanden des Ranges* 1, *also auch direkter Durchschnitt von primären direkten Quotientengruppen des Ranges* 1.

§ 8.

Isomorphiesatz.

I.-Satz. *Ist die abgeschlossene Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf zwei verschiedene Arten als direkte Summe von primären Gruppen des Ranges* 1 *darstellbar*:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \dots = \sum_{\sigma<\nu} \mathfrak{F}_\sigma, \tag{1}$$

$$\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{F}}_1 \oplus \overline{\mathfrak{F}}_2 \oplus \dots = \sum_{\sigma<\mu} \overline{\mathfrak{F}}_\sigma, \tag{2}$$

so lassen sich die Summanden der Zerlegung (1) *eineindeutig denen der Zerlegung* (2) *so zuordnen, daß entsprechende Gruppen isomorph sind.*

Wegen Hauptsatz 1 brauchen beim Beweis des I.-Satzes nur primäre Gruppen betrachtet zu werden.

Wir fassen in den beiden Zerlegungen die Summanden gleichen Typs zusammen und erhalten die leichtverständlichen Gruppenbezeichnungen

$$\mathfrak{T}^{p^k},\ \mathfrak{T}_{p^\infty},\ \mathfrak{T}^{p^\infty},\ \mathfrak{T}_{p^\infty}^{p^\infty}$$

bzw.

$$\overline{\mathfrak{T}}^{p^k},\ \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty},\ \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty},\ \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}^{p^\infty}.$$

Der I.-Satz behauptet nun:

Zwei entsprechende Gruppen, etwa $\mathfrak{T}^{p^k}$ und $\mathfrak{T}^{p^k}$, sind isomorph und ihre Summanden vom Range 1 lassen sich einander eineindeutig zuordnen.

Diese Behauptungen wollen wir nun beweisen. Es ist

$$\mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}^{p^k} \oplus \mathfrak{T}_{p^\infty} \oplus \mathfrak{T}^{p^\infty} \oplus \mathfrak{T}_{p^\infty}^{p^\infty}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{G} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{T}}^{p^k} \oplus \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty} \oplus \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty} \oplus \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}^{p^\infty}. \tag{4}$$

Die abgeschlossene Hülle $\mathfrak{E}$ der Elemente endlicher Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist von der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ unabhängig eindeutig bestimmt

$$\mathfrak{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}^{p^k} \oplus \mathfrak{T}_{p^\infty}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{T}}^{p^k} \oplus \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}. \tag{6}$$

Denn einerseits ist $\mathfrak{E}$ Obergruppe von $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}^{p^k}$ und von $\mathfrak{T}_{p^\infty}$, andrerseits auch Untergruppe von $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}^{p^k} \oplus \mathfrak{T}_{p^\infty}$, weil $\mathfrak{E}$ kein Element enthalten kann, das eine $\mathfrak{T}^{p^\infty}$- oder $\mathfrak{T}_{p^\infty}^{p^\infty}$-Komponente hat, die von ω verschieden ist.

Aus (5) und (6) folgt

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{T}_{p^\infty}^{p^\infty} \oplus \mathfrak{T}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}^{p^\infty} \oplus \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty} = \overline{\mathfrak{U}}, \tag{7}$$

da beide Gruppen isomorph sind zu $\mathfrak{G}|\mathfrak{E}$.

Die Gruppe der Elemente der Höhe p^∞ von $\mathfrak{E}$ ist ebenfalls von der Zerlegung von $\mathfrak{E}$ unabhängig. Sie ist

$$\mathfrak{T}_{p^\infty} = \overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}. \tag{8}$$

Denn ein Element von $\mathfrak{E}$ mit einer von ω verschiedenen $\mathfrak{T}^{p^k}$-Komponente hat eine endliche Höhe, die Teiler von p^k ist. — Da $\mathfrak{U} \leftrightarrow \mathfrak{U}$, können wir die Zerlegung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{U}$ abbilden. Wir erhalten dann zwei verschiedene Zerlegungen von $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{T}^{p^\infty} \oplus \mathfrak{T}^{p^\infty}_{p^\infty} = \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty} \oplus \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty}_{p^\infty},$$

worin dann $\mathfrak{T}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty}$, $\mathfrak{T}^{p^\infty}_{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty}_{p^\infty}$. Die von der Zerlegung unabhängige Gruppe der Elemente der Höhe p^∞ von $\mathfrak{U}$ ist

$$\mathfrak{T}^{p^\infty}_{p^\infty} = \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty}_{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty}_{p^\infty} \tag{9}$$

und daher

$$\mathfrak{U} \,|\, \mathfrak{T}^{p^\infty}_{p^\infty} \leftrightarrow \mathfrak{T}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty} \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^{p^\infty}. \tag{10}$$

Wir zeigen nun zunächst: $\mathfrak{T}^p \leftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^p$.

Wir bilden dazu die von der Zerlegung von $\mathfrak{E}$ unabhängige Gruppe $\mathfrak{D}^p$ der Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{E}$. Diese ist abgeschlossen. Denn sei α ein Hp von $\mathfrak{D}^p$ in $\mathfrak{E}$ und durchlaufe $\mathfrak{G}_\sigma$ alle Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$, so genügt α dem verträglichen Kongruenzsystem:

$$\alpha \equiv \alpha_\sigma \ (\mathfrak{G}_\sigma),$$

worin die α_σ aus $\mathfrak{D}^p$ gewählt werden können.

$$p \cdot \alpha \equiv p \cdot \alpha_\sigma \equiv \omega \ (\mathfrak{G}_\sigma), \quad \text{da } \alpha_\sigma \text{ aus } \mathfrak{D}^p.$$

Also ist $p \cdot \alpha = \omega$, α gehört zu $\mathfrak{D}^p$, w. z. b. w.

Der Zerlegung (5) bzw. (6) entspricht die Zerlegung

$$\mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\mathfrak{T}^{p^k}]^p \oplus [\mathfrak{T}_{p^\infty}]^p \oplus \mathfrak{T}^p \tag{11}$$

bzw.

$$\mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\overline{\mathfrak{T}}^{p^k}]^p \oplus [\overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}]^p \oplus \overline{\mathfrak{T}}^p, \tag{12}$$

worin $[\mathfrak{T}^{p^k}]^p$ die Gruppe der Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{T}^{p^k}$ bedeutet. $[\mathfrak{T}^{p^k}]^p$, $[\mathfrak{T}_{p^\infty}]^p$ sind wieder abgeschlossene Gruppen.

In $\mathfrak{D}^p$ bestimmen wir nun die Gruppe $p \cdot \mathfrak{D}^p$ [33]) der Elemente, deren Höhe in $\mathfrak{G}$ ein Vielfaches von p ist. Diese ist nach Hilfssatz 1 § 6 abgeschlossen und von der Zerlegung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}^p$ unabhängig. Den Zerlegungen (11) und (12) von $\mathfrak{D}^p$ entsprechen die Zerlegungen

$$p \cdot \mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\mathfrak{T}^{p^k}]^p \oplus [\mathfrak{T}_{p^\infty}]^p, \tag{13}$$

$$p \cdot \mathfrak{D}^p = \sum_{k=2}^{\infty} [\overline{\mathfrak{T}}^{p^k}]^p \oplus [\overline{\mathfrak{T}}_{p^\infty}]^p. \tag{14}$$

[33]) Vgl. Hilfssatz 1 § 6.

Denn einerseits enthalten die rechts stehenden Gruppen nur Elemente der Höhe p^l $[l \geqq 1]$, andrerseits hat ein Element von $\mathfrak{D}^p$ mit einer $\mathfrak{T}^p$-Komponente $a \neq \omega$ die Höhe 1, gehört also nicht zu $p\mathfrak{D}^p$. Es ist daher

$$\mathfrak{T}^p \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{T}}^p, \tag{15}$$

weil beide Gruppen isomorph zu $\mathfrak{D}^p | p\mathfrak{D}^p$ sind, w. z. b. w.

Wie vorhin bei $\mathfrak{U}$, $\overline{\mathfrak{U}}$ schließen wir, daß wir nur jeweils zwei verschiedene Zerlegungen von $\mathfrak{T}^p$ bzw. $\mathfrak{T}^{p^\infty}$ bzw. $\mathfrak{T}_{p^\omega}^{p^\omega}$ zu untersuchen haben.

Für $\mathfrak{T}^p$, $\mathfrak{T}^{p^\infty}$, $\mathfrak{T}_{p^\omega}^{p^\omega}$ beweisen wir jetzt den sogenannten Auswechselsatz, der etwas mehr aussagt als der I.-Satz. Da der Beweis für alle drei Gruppen in vielen Teilen gleich verläuft, bezeichnen wir die drei Gruppen an solchen Stellen mit dem gemeinsamen Buchstaben $\mathfrak{T}$.

A.-Satz. *Sind*

$$\mathfrak{T} = \sum_{\nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu, \tag{16}$$

$$\mathfrak{T} = \sum_{\nu' \leqq \tau} \overline{\mathfrak{Z}}_{\nu'} \tag{17}$$

zwei verschiedene Zerlegungen von $\mathfrak{T}$ in direkte Summanden des Ranges 1, *so läßt sich die Menge $\mathfrak{M}$ der $\mathfrak{Z}_{\nu'}$ so neu wohlordnen, daß für jedes $\mu \leqq \tau$ gilt*

$$\mathfrak{T} = \sum_{\nu \leqq \mu} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\mu - 1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu . \tag{18_μ}$$

Limeszahlen ν und ν' sollen im Satze $\mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{Z}_{\nu'} = \omega$ entsprechen. Insbesondere ergibt der Satz $\sigma = \tau$; denn wegen (17) ist $\mathfrak{T} | \sum_{\nu' \leqq \tau} \overline{\mathfrak{Z}}_{\nu'} \longleftrightarrow \omega$, wegen

$$\text{ist dazu} \quad \mathfrak{T} | \sum_{\nu \leqq \tau} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \longleftrightarrow \sum_{\tau + 1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu , \tag{18_τ}$$

woraus $\sigma \leqq \tau$ folgt. Wäre aber $\sigma < \tau$, so ergäbe sich

$$\mathfrak{T} = \sum_{\nu \leqq \sigma} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu , \tag{18_σ}$$

was (17) widerspricht.

Den Beweis des A.-Satzes führen wir mit transfiniter Induktion. Setzen wir $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_0 = \omega$, so gilt der Satz für $\mu = 1$. Er gelte für $\mu < \lambda$.

a) λ sei keine Limeszahl.

Nach Voraussetzung haben wir eine Teilmenge $\mathfrak{M}_{\lambda - 1}$ der Menge $\mathfrak{M}$ aller $\overline{\mathfrak{Z}}_{\nu'}$: $\overline{\mathfrak{Z}}_0, \overline{\mathfrak{Z}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{Z}}_{\lambda - 1}$ so wohlgeordnet, daß

$$\mathfrak{T} = \sum_{\nu \leqq \lambda - 1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu . \tag{$18_{\lambda - 1}$}$$

Das Komplement von $\mathfrak{M}_\varrho$ in $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_\varrho$. Die direkte Summe aller Gruppen aus $\mathfrak{R}_\varrho$ sei mit $\{\mathfrak{R}_\varrho\}$ bezeichnet.

Wir wählen eine Gruppe $\mathfrak{Z}_\lambda$ aus der Restmenge $\mathfrak{R}_{\lambda - 1}$, so daß jedes ihrer Elemente eine von ω verschiedene $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente in der Zerlegung

$(18_{\lambda-1})$ hat, und daß jedes Element von $\mathfrak{Z}_\lambda$ Komponente eines Elementes von $\mathfrak{Z}_\lambda$ ist.

Dazu muß man, im Falle $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^p$, $\mathfrak{Z}_\lambda$ so wählen, daß sein erzeugendes Element $\bar{\alpha}$ eine von ω verschiedene $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente α hat. Eine solche Gruppe $\mathfrak{Z}_\lambda$ läßt sich finden, denn sonst wäre schon $\{\mathfrak{R}_{\lambda-1}\} \oplus \sum_{\nu \leqq \lambda-1} \mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{T}^{p}$ Untergruppe von $\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu$.

Im Falle $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{p^\infty}$ hat man $\mathfrak{Z}_\lambda$ so zu wählen, daß das erzeugende Element von $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$ eine $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente hat, die $\mathfrak{Z}_\lambda$ erzeugt. Dann ist wieder jedes Element von $\mathfrak{Z}_\lambda$ Komponente eines Elementes von $\mathfrak{Z}_\lambda$. Ein solches $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$ läßt sich finden, denn sonst wäre $\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu \oplus p \cdot \mathfrak{Z}_\lambda$ Obergruppe von $\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \{\mathfrak{R}_{\lambda-1}\} = \mathfrak{T}^{p^\infty}$, wo $p \cdot \mathfrak{Z}_\lambda$ die Gruppe der p-fachen von $\mathfrak{Z}_\lambda$ bedeutet.

Im Falle $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{p^\infty}^{p^\infty}$ braucht man $\mathfrak{Z}_\lambda$ nur so zu wählen, daß ein beliebiges Element $\bar{\alpha}$ von $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$ eine von ω verschiedene $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente β hat. Denn ist $\bar{\alpha} = \beta \oplus \gamma$, wo β aus $\mathfrak{Z}_\lambda$, γ aus $\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu$, und $p^k \cdot \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}$, so ist α_1 das einzige Element, das einer solchen Gleichung genügt, denn die Differenz zweier solcher Elemente hätte die Ordnung p^k statt p^∞. Daher ist, wenn $p^k \beta_1 = \beta$, β_1 aus $\mathfrak{Z}_\lambda$, $p^k \cdot \gamma_1 = \gamma$, γ_1 aus $\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu$, $\bar{\alpha}_1 = \beta_1 \oplus \gamma_1$. Also hat jedes Element von $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$ eine $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente $\beta \equiv \omega$, und jedes Element von $\mathfrak{Z}_\lambda$ ist Komponente eines Elementes von $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$. Der Existenzbeweis für die Gruppe $\mathfrak{Z}_\lambda$ wird wie bei $\mathfrak{T}^p$ geführt.

Für die so für $\mathfrak{T}$ konstruierte Gruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$ ist

$$\left(\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \mathfrak{Z}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu\right) \cap \mathfrak{Z}_\lambda = \omega,$$

da in $\left(\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu\right)$ wegen $(18_{\lambda-1})$ kein Element mit von ω verschiedener $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente enthalten ist.

$\left(\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\lambda \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu\right)$ ist daher eine direkte Summe und es ist

$$(18_\lambda) \qquad \mathfrak{T} = \sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu.$$

Denn einerseits ist die links stehende Gruppe eine Untergruppe von $\mathfrak{T}$, hat andrerseits irgendein Element $\bar{\alpha}$ von $\overline{\mathfrak{Z}}_\lambda$ die $\mathfrak{Z}_\lambda$-Komponente α in $(18_{\lambda-1})$, so ist α Element der links stehenden Gruppe. Also ist $\mathfrak{Z}_\lambda$ und damit $\sum_{\nu \leqq \lambda-1} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{T}$ Untergruppe der Gruppe $\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \oplus \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu$, w. z. b. w.

b) Wenn λ Limeszahl ist.

Bezeichnen wir $\sum_{\mu+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu$ mit $\mathfrak{F}_\mu$, $\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ mit $\mathfrak{A}$, so ist wegen der Gültigkeit des A.-Satzes für $\mu < \lambda$, d. h. von (18_μ), der Hilfssatz 1 in § 2 anwendbar, aus dem folgt:

$$(18_\lambda) \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \bigwedge_{\mu<\lambda} \mathfrak{F}_\mu = \sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu + \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu .$$

Damit der A.-Satz auch für eine Limeszahl λ vollständig bewiesen ist, ist noch zu zeigen, daß hier rechts eine direkte Summe steht. Es ist also zu zeigen, daß $\sum_{\nu \leqq \lambda} \mathfrak{Z}_\nu \cap \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu = \omega$ ist. Wir setzen $\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \cap \sum_{\mu+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{C}_\mu$. Dann ist $\mathfrak{C}_\mu \oplus \sum_{\nu \leqq \mu} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ Untergruppe von $\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu$. $\sum_{\nu \leqq \lambda} \mathfrak{Z}_\nu \mid \sum_{\nu \leqq \mu} \mathfrak{Z}_\nu$ wird repräsentiert durch $\sum_{\mu+1 \leqq \nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ wegen (17), eine Untergruppe von $\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \mid \sum_{\nu \leqq \mu} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ durch $\mathfrak{C}_\mu$. Die Elemente von $\mathfrak{C}_\mu$ lassen sich also eineindeutig den Elementen einer Untergruppe von $\sum_{\mu+1 \leqq \nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ zuordnen, die Elementen von $\bigwedge_{\mu<\lambda} \mathfrak{C}_\mu$ also einer Untergruppe von $\bigwedge_{\mu<\lambda} \left(\sum_{\mu+1 \leqq \nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \right) = \omega$. Also ist

$$\omega = \bigwedge_{\mu<\lambda} \mathfrak{C}_\mu = \bigwedge_{\mu<\lambda} \left(\sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \cap \sum_{\mu+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu \right) = \sum_{\nu \leqq \lambda} \overline{\mathfrak{Z}}_\nu \cap \sum_{\lambda+1 \leqq \nu \leqq \sigma} \mathfrak{Z}_\nu ,$$

w. z. b. w.

Die Behauptungen des A.-Satzes sind damit für $\mathfrak{T}^p$ und $\mathfrak{T}^{(p)}$ bzw. $\mathfrak{T}^{p^\infty}$ und $\mathfrak{T}^{(p^\infty)}$ bzw. $\mathfrak{T}_{p^\infty}^{p^\infty}$ und $\mathfrak{T}_{(p^\infty)}^{(p^\infty)}$ vollständig bewiesen. Bleibt noch der Beweis für $\mathfrak{T}^{p^k}$ und $\mathfrak{T}_{p^\infty}$.

In diesen Gruppen kann man den Beweis des I.-Satzes auf den schon gelungenen Beweis für Gruppen des Typus $\mathfrak{T}^p$ zurückführen, da sich die Summanden von $\mathfrak{T}^{p^k}$ eineindeutig den direkten Summanden vom Typus $\mathfrak{Z}^p$ einer direkten Summenzerlegung der Gruppe $p^{k-1} \cdot \mathfrak{E}$, das ist der Gruppe der p^{k-1}-fachen von $\mathfrak{E}$, zuordnen lassen. Bei $\mathfrak{T}_{p^\infty}$ braucht man wegen (8) nur alle Summanden eineindeutig einer direkten Summenzerlegung der Gruppe $[\mathfrak{T}_{p^\infty}]^p$, das ist der Gruppe der Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{T}_{p^\infty}$, die vom Typus $\mathfrak{T}^p$ ist, zuzuordnen.

§ 9.

Erweiterung einer beliebigen Abelschen Gruppe zu einer abgeschlossenen Gruppe[34]).

Wir haben uns bisher von vornherein auf abgeschlossene Gruppen beschränkt, ohne uns darüber Rechenschaft zu geben, ob das nicht eine zu große Spezialisierung ist. Daß dies nicht der Fall ist, wird sich daraus ergeben, daß eine beliebige Abelsche Gruppe (Operatorenbereich der ganzen

[34]) Vgl. B., S. 220; P 2, Einleitung.

rationalen Zahlen) $\mathfrak{G}$ zu einer abgeschlossenen Gruppe $\mathfrak{H}$ erweitert werden kann (abgeschlossen werden kann), so daß $\mathfrak{G}$ eine gewöhnliche Untergruppe von $\mathfrak{H}$ wird, sogar derart, daß jedes Element von $\mathfrak{H}$ Hp. von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ wird.

Wir wählen aus den großen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ *irgendein* solches System $\mathfrak{S}$ aus, das mit seinen Restklassen ein topologisches Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$ bildet. Durchlaufe $\mathfrak{G}_\sigma$ alle Umgebungsgruppen von $\mathfrak{G}$. Wir bilden nun die Gruppe $\mathfrak{H}$ aller verträglichen Kongruenzensysteme nach allen $\mathfrak{G}_\sigma$, wobei in üblicher Weise mit den Kongruenzensystemen gerechnet werden soll. $\mathfrak{H}$ hat als Untergruppe die Gruppe aller der verträglichen Kongruenzensysteme, die schon in $\mathfrak{G}$ eine — und wegen des Trennungsaxioms auch nur eine — Lösung haben. Diese Gruppe ist mit $\mathfrak{G}$ isomorph. Wir identifizieren sie daher und nennen sie auch $\mathfrak{G}$.

Als Umgebung in der neuen Gruppe $\mathfrak{H}$ definieren wir die Gesamtheit der verträglichen Kongruenzensysteme, in denen die Kongruenz

$$\xi \equiv \alpha_\nu \ (\mathfrak{G}_\nu) \qquad (\nu, \alpha_\nu \text{ fest}) \tag{1}$$

oder eine damit gleichwertige auftritt. Die so entstandene Umgebung entspricht der Umgebung $(\alpha_\nu + \mathfrak{G}_\nu)$ in $\mathfrak{G}$. Man erhält alle Umgebungen von $\mathfrak{H}$, indem man $\mathfrak{G}_\nu$ alle $\mathfrak{G}_\sigma$, α_ν jeweils ein volles Repräsentantensystem der Restklassen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchlaufen läßt.

Jede solche Umgebung ist Restklasse nach einer Umgebungsgruppe von $\mathfrak{H}$, nämlich nach der, in deren Elementen immer

$$\xi \equiv \omega \ (\mathfrak{G}_\nu)$$

auftritt. Wir nennen sie $\mathfrak{H}_\nu$.

Diese neuen Umgebungen erfüllen wirklich die Umgebungsaxiome. Dies ist für A, B′, C′ sofort ersichtlich. Von der Gültigkeit des Trennungsaxioms überzeugt man sich so:

Sind α, β zwei verschiedene Elemente der Umgebung $(\sigma_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$, so unterscheiden sie sich in mindestens einer Kongruenz nach den $\mathfrak{G}_\sigma$, etwa in der nach $\mathfrak{G}_1$. Dann sind $\alpha + \mathfrak{G}_1$, $\beta + \mathfrak{G}_1$ punktfremde Umgebungen in $\mathfrak{G}$, $\alpha + \mathfrak{H}_1$, $\beta + \mathfrak{H}_1$ punktfremde Umgebungen in $\mathfrak{H}$. Also sind $(\sigma_\tau + \mathfrak{H}_\tau) \cap (\alpha + \mathfrak{H}_1)$ und $(\sigma_\tau + \mathfrak{H}_\tau) \cap (\beta + \mathfrak{H}_1)$ punktfremde Umgebungen in $(\sigma_\tau + \mathfrak{H}_\tau)$. Postulat 1 ist also erfüllt von $\mathfrak{H}$.

Aus der Konstruktion von $\mathfrak{H}$ folgt, daß für ein beliebiges Element χ von $\mathfrak{H}$ dann und nur dann

$$\chi \equiv \alpha_\mu \ (\mathfrak{H}_\mu) \qquad (\mu \text{ fest})$$

ist, wobei α_μ aus $\mathfrak{G}$ gewählt werden soll, wenn in dem verträglichen χ definierenden Kongruenzensystem die Kongruenz

$$\xi \equiv \alpha_\mu \ (\mathfrak{G}_\mu)$$

vorkommt.

Jedes verträgliche Kongruenzensystem

$$\xi \equiv \chi_\sigma \ (\mathfrak{H}_\sigma) \tag{2}$$

ist daher in $\mathfrak{H}$ lösbar, da das System

$$\xi \equiv \chi_\sigma \ (\mathfrak{G}_\sigma) \tag{3}$$

in $\mathfrak{H}$ eine Lösung χ hat. Da auf der rechten Seite der Kongruenzen immer Elemente aus $\mathfrak{G}$ gesetzt werden können, ist χ Hp. von $\mathfrak{G}$.

Postulat 2 ist also von $\mathfrak{H}$ auch erfüllt.

Unsere so konstruierte Gruppe $\mathfrak{H}$ hat also alle Eigenschaften einer abgeschlossenen Gruppe.

Da jedes Element von $\mathfrak{H}$ Hp. von $\mathfrak{G}$ ist, ist $\mathfrak{H}$ eine kleinste, abgeschlossene $\mathfrak{G}$ enthaltende Gruppe. Ebenso gibt es kleinste, eine Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ enthaltende abgeschlossene Untergruppen $\overline{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{H}$, die eindeutig bestimmt sind. Wir nennen $\mathfrak{H}$ abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{F}}$ abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{F}$.

Bei der Konstruktion der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{G}$ war noch eine gewisse Willkür bei der Wahl des definierenden Umgebungssystems $\mathfrak{S}$ gelassen, das die Topologisierung von $\mathfrak{G}$ bestimmte. Je nach der Wahl von $\mathfrak{S}$ erhalten wir verschiedene abgeschlossene Hüllen von $\mathfrak{G}$ mit verschiedenen Zerlegungen in primäre direkte Summanden des Ranges 1. Wie verhalten sich nun diese verschiedenen abgeschlossenen Hüllen zueinander?

Eine „größte“ abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ erhält man bei Zugrundelegung des größtmöglichsten Umgebungssystems von $\mathfrak{G}$, nämlich des Systems $\overline{\mathfrak{S}}$ *aller* großen Untergruppen und ihrer Restklassen. Es bedeute nun $\mathfrak{H}$ eine abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{G}$ bezüglich des Teilumgebungssystems $\mathfrak{S}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$. Durchläuft $\mathfrak{U}_\sigma$ alle in $\mathfrak{S}$ enthaltenen großen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so bilden die Elemente ξ_α von $\overline{\mathfrak{G}}$, in deren definierendem Kongruenzensystem die Kongruenzen $\xi_\alpha \equiv \omega \ (\mathfrak{U}_\sigma)$ für jedes σ vorkommen, eine relativ $\overline{\mathfrak{G}}$ abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{G}_\mathfrak{S}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Jedes verträgliche Kongruenzensystem $\xi \equiv \beta_\sigma \ (\mathfrak{U}_\sigma)$ definiert nun einerseits ein Element von $\mathfrak{H}$, bestimmt andererseits in $\overline{\mathfrak{G}}$ eindeutig eine Restklasse nach $\mathfrak{G}_\mathfrak{S}$, und es ist leicht ersichtlich, daß $\mathfrak{H}$ isomorph zu $\overline{\mathfrak{G}} \mid \mathfrak{G}_\mathfrak{S}$ ist, und zwar in dem Sinne, daß abgeschlossenen Untergruppen in $\mathfrak{H}$ abgeschlossene Untergruppen in $\overline{\mathfrak{G}} \mid \mathfrak{G}_\mathfrak{S}$ entsprechen und umgekehrt. Da die $\mathfrak{U}_\sigma$ nur ω gemeinsam haben [Trennungsaxiom], so gilt noch $\mathfrak{G}_\mathfrak{S} \cap \mathfrak{G} = \omega$.

Es bedeute jetzt umgekehrt $\overline{\mathfrak{G}}_1$ irgendeine abgeschlossene Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\overline{\mathfrak{G}}_1 \cap \mathfrak{G} = \omega$, dann gibt es eine abgeschlossene Hülle $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{G}$, die zu $\overline{\mathfrak{G}} \mid \overline{\mathfrak{G}}_1$ im obigen Sinne isomorph ist. Denn nach Satz 4 § 2 ist $\overline{\mathfrak{G}}_1$ Durchschnitt abgeschlossener großer Untergruppen von $\overline{\mathfrak{G}}$. Ist $\overline{\mathfrak{S}}_1$ also die Gesamtheit aller großen abgeschlossenen Untergruppen $\overline{\mathfrak{U}}_\sigma^{(1)}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, die $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ent-

halten, und setzen wir $\overline{\mathfrak{U}}_\sigma^{(1)} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{U}_\sigma^{(1)}$, so ist $\underset{\sigma}{\Delta} \mathfrak{U}_\sigma^{(1)} = \mathfrak{G} \cap \underset{\sigma}{\Delta} \overline{\mathfrak{U}}_\sigma^{(1)} = \mathfrak{G} \cap \overline{\mathfrak{G}}_1 = \omega$. Die $\mathfrak{U}_\sigma^{(2)}$ bilden also mit ihren Restklassen ein Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$, und $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ist wie oben die Gruppe der Elemente ξ_α von $\overline{\mathfrak{G}}$, in deren definierendem Kongruenzensystem die Kongruenz $\xi_\alpha \equiv \omega \ (\mathfrak{U}_\sigma^{(1)})$ für jedes σ vorkommt.

Schließen wir also $\mathfrak{G}$ nach dem System $\mathfrak{S}_1$ der $\mathfrak{U}_\sigma^{(1)}$ ab, so wird die entstehende abgeschlossene Hülle $\mathfrak{H}_1$ isomorph zu $\overline{\mathfrak{G}} \mid \overline{\mathfrak{G}}_1$.

Satz. *Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ die oben definierte „größte" abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{G}$, so besteht zwischen den abgeschlossenen Hüllen $\mathfrak{H}_\tau$ von $\mathfrak{G}$ und den abgeschlossenen Untergruppen $\overline{\mathfrak{G}}_\tau$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{G} \cap \overline{\mathfrak{G}}_\tau = \omega$ eine eineindeutige Zuordnung:*

1. *Zu jedem $\mathfrak{H}_\tau$ gehört ein einziges $\overline{\mathfrak{G}}_\tau$, das auf die oben beschriebene Art durch das definierende Umgebungssystem von $\mathfrak{H}_\tau$ bestimmt ist.*

2. *Zu jedem $\overline{\mathfrak{G}}_\tau$ gehört ein einziges $\mathfrak{H}_\tau$, da $\overline{\mathfrak{G}}_\tau$ ein Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$ bestimmt.*

3. *Die Zuordnung* 1 *ist dieselbe wie die Zuordnung* 2, *und es gilt:*

$$\mathfrak{H}_\tau \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{G}} \mid \overline{\mathfrak{G}}_\tau .$$

§ 10.

Beispiel einer bei zwei verschiedenen Topologisierungen abgeschlossenen Gruppe.

Wir betrachten die abgeschlossene Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{Y} \oplus \mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2 \oplus \dots$, wo $\mathfrak{Y}$ und die $\mathfrak{Z}_i$ vom Typus $\mathfrak{Z}^p$ sind. Die Gruppe besteht dann aus allen endlichen und unendlichen Summen aus je einem Element jedes direkten Summanden. Sind $\eta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ erzeugende Elemente von $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots$, so konstruieren wir eine gewöhnliche größte (nicht abgeschlossene) Obergruppe $\mathfrak{H}$ der (nicht abgeschlossenen) Vereinigungsgruppe $\mathfrak{V}$ der Summanden $\mathfrak{Z}_i$ von $\mathfrak{G}$, d. h. einer Gruppe, in der nur endliche Elementesummen in den ζ_i definiert sind, die den Hp. $\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \dots \oplus \zeta_i \oplus \dots = \alpha$ von $\mathfrak{V}$ nicht enthält. Diese wird nach dem Muster von Satz 5 § 1 konstruiert. Nach dieser Konstruktion werden die unendlichen Summen in den ζ_i neu erklärt. Die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen unendlichen Summen behalten ihre Bedeutung als unendliche Summen bei. Wir bezeichnen nun als die unendliche Summe $\zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \dots \oplus \zeta_n \oplus \dots$ nicht mehr das früher so genannte Element α, sondern das Element η, während wir das frühere Element $\alpha = \zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \dots$ nun zu einem von $\mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2 \oplus \dots \mathfrak{Z}_n \oplus \dots$ unabhängigen Element α machen. $\{\alpha\} = \overline{\mathfrak{Y}}$. Dann ist die neu aufgefaßte Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ wieder abgeschlossen, $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{Z}_n \oplus \overline{\mathfrak{Y}}$, denn sie enthält wieder alle unendlichen Summen aus je einem Element der abgeschlossenen direkten Summanden.

$\overline{\mathfrak{G}}$ ist mit $\mathfrak{G}$ identisch, wenn man beide als gewöhnliche Abelsche Gruppen auffaßt. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist mit $\mathfrak{G}$ aber nicht homöomorph, wenn man beide als abgeschlossene Gruppen auffaßt. Denn die gewöhnliche Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ hat in $\mathfrak{G}$ einen Hp. α, der nicht Hp. von $\mathfrak{B}$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ ist.

Zusatz bei der Korrektur. In unserem Beispiel wurden die wegen der Abgeschlossenheit existierenden Zerlegungen der Gruppen trotz Nicht-Homöomorphie der Gruppenräume isomorph. Dies gilt allgemein:

Satz. *Ist $\mathfrak{G}$ eine unendliche Abelsche Gruppe mit g-adischem Operatorenring, und ist $\mathfrak{G}$ auf zwei nicht homöomorphe Weisen unter Beibehaltung der Operatorzuordnung als abgeschlossen anzusehen, so sind die entstehenden Zerlegungen isomorph.*

Den Beweis wollen wir nur andeuten. Durch die Operatoren allein definiert sind die größten primären direkten Summanden. Wir können daher $\mathfrak{G}$ als primär zu p-gehörig annehmen. Da Höhe und Ordnung eines Elementes ebenfalls nur von den Operatoren abhängen, so kann man wie beim Beweis des Auswechselsatzes die Isomorphie entsprechender $\mathfrak{T}$-Gruppen nachweisen. Da schließlich jede abgeschlossene Gruppe des Ranges 1 im einen Raum auch abgeschlossen im anderen Raume ist, so kann man durch ein Auswechselverfahren auch feststellen, daß die Zerlegung isomorph ist.

Anhang.

Beispiel einer nicht abgeschlossenen und nicht zerlegbaren Gruppe[35]**.**

Wir bilden die Abelsche Additionsgruppe $\mathfrak{B}$ aller endlichen Linearformen in den Elementen α, α_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\mathfrak{B} = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}.$$

Zwischen α und den α_k sollen folgende Relationen bestehen:

$$p \cdot \alpha = \omega,$$

$$p^k \cdot \alpha_k = \alpha.$$

$\mathfrak{B}$ enthält also Elemente nur endlicher, zur Primzahl p gehöriger Ordnung. Sonst sollen keine weiteren Relationen bestehen, d. h. es soll keine Linearform geben, für die

$$c \cdot \alpha + c_{r_1} \alpha_{r_1} + \ldots + c_{r_n} \alpha_{r_n} = \omega \qquad (c_{r_i} \not\equiv 0 \,(p^{r_i})).$$

In der Gruppe $\mathfrak{B}$ läßt sich nicht, wie immer in abgeschlossenen Gruppen, zu jedem Element der Ordnung p ein direkter Summand des Ranges 1

[35]) Dieses Beispiel stammt von H. Prüfer: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift **17** (1923), S. 60.

abspalten. Z. B. nicht für das Element α. Denn ein solcher müßte, wie in Satz 1 § 5 unabhängig von der Abgeschlossenheit bewiesen ist, Servanzuntergruppe sein. Nun hat α die Höhe p^∞, da $p^k \cdot \alpha_k = \alpha$. Es gibt aber schon kein Element β der Höhe p^∞ in $\mathfrak{B}$, für das $p \cdot \beta = \alpha$. Denn jede endliche Linearform $(c_{r_1}\alpha_{r_1} + \ldots + c_{r_n}\alpha_{r_n})$ hat die Höhe p^l, wenn p^l der größte gemeinsame Teiler der c_{r_i} ist. Die Unmöglichkeit der Konstruktion einer Servanzuntergruppe des Ranges 1 für α beweist schon, daß $\mathfrak{B}$ auf keine Weise als abgeschlossen angesehen werden kann. Man kann aber auf andere Weise von $\mathfrak{B}$ nacheinander direkte Summanden des Ranges 1 abspalten. Nämlich so:

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1 - p\alpha_2\} \oplus \{\alpha_2, \alpha_3, \ldots\} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{G}_1,$$ [36])

$$\mathfrak{G}_1 = \{\alpha_2 - p\alpha_3\} \oplus \{\alpha_3, \alpha_4, \ldots\} = \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{G}_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{G}_n = \{\alpha_{n+1} - p\alpha_{n+2}\} \oplus \{\alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \ldots\} = \mathfrak{F}_{n+1} \oplus \mathfrak{G}_{n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\bigcap_n^\infty \mathfrak{G}_n$ enthält sicher die Gruppe $\{\alpha\}$, da alle $\mathfrak{G}_n$ sie enthalten. $\bigcap_n^\infty \mathfrak{G}_n$ enthält aber kein weiteres Element $(c_{r_1}\alpha_{r_1} + \ldots + c_{r_n}\alpha_{r_n})$, weil $\mathfrak{G}_{r_n}$ kein α_s $[s \leqq r_n]$ enthält. Also ist $\bigcap_n^\infty \mathfrak{G}_n = \{\alpha\}$. Es ist aber nicht

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_n \oplus \ldots \oplus \{\alpha\},$$

wobei nur immer endlich viele Elemente aus je einem direkten Summanden zu addieren sind. Denn z. B. ist das Element α_1 nicht als eine solche direkte Summe darstellbar. Ja nicht einmal, wenn wir die Definition unserer Gruppe $\mathfrak{B}$ erweitern und unendliche Summen aus je einem Element aller direkten Summanden zulassen wie bei abgeschlossenen Gruppen, ist das Element α_1 in der direkten Summe enthalten. In $\mathfrak{B}$ kann man zwar nacheinander direkte Summanden abspalten (was auch nicht immer bei nicht abgeschlossenen Gruppen möglich ist), aber $\mathfrak{B}$ ist nicht als direkte Summe dieser Summanden darstellbar.

Wir wollen nun die Gruppe $\mathfrak{B}$ abschließen, und zwar wählen wir die großen Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$ mit ihren Restklassen als Umgebungen. Dazu nehmen wir noch die Gruppe $\mathfrak{G}_0 = \{(\alpha_1 - p\alpha_2), (\alpha_2 - p\alpha_3), \ldots\}$ mit ihren Restklassen, die als eine größte, α nicht enthaltende Untergruppe große Untergruppe ist. Denn die $\mathfrak{G}_i$ allein haben noch nicht nur ω zum Durchschnitt: $\bigcap_n^\infty \mathfrak{G}_n = \{\alpha\}$. Wir bilden nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{B}}$ aller verträglichen Kongruenzensysteme nach allen $\mathfrak{G}_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ nach dem Muster

[36]) Vgl. Anm. [18]).

von § 9. Insbesondere sind in $\overline{\mathfrak{B}}$ auch folgende Elemente enthalten:

$$\begin{array}{ll} \zeta_1 \equiv p^{k-1}\alpha_k(\mathfrak{G}_k) & [k=1,2,\ldots] \\ \zeta_1 \equiv \alpha_1 \quad (\mathfrak{G}_0) & \\ \hline p\zeta_1 = \alpha, & \\ \zeta_2 \equiv p^{k-1}\alpha_{k+1}(\mathfrak{G}_k) & [k=1,2,\ldots] \\ \zeta_2 \equiv \alpha \quad (\mathfrak{G}_0) & \\ \hline p\zeta_2 = \zeta_1, & \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \zeta_n \equiv p^{k-1}\alpha_{k+n-1}(\mathfrak{G}_k) & [k=1,2,\ldots] \\ \zeta_n \equiv \alpha_n \quad (\mathfrak{G}_0) & \\ \hline p\zeta_n = \zeta_{n-1}, & \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

$\mathfrak{F} = \{\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots\}$ ist dann eine Servanzuntergruppe vom Typus $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$ von $\overline{\mathfrak{B}}$, die also abgeschlossen ist. $\mathfrak{F}$ ist sogar direkter Summand. Die $\mathfrak{F}_i$ sind als endliche Gruppen schon abgeschlossen. Der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{G}}_i$ der $\mathfrak{G}_i$ ist nun nicht mehr $\{\alpha\}$, sondern $\mathfrak{F}$:

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{F}_n \oplus \cdots \oplus \mathfrak{F},$$

wobei man nun unendliche Summen bilden darf.

(Eingegangen am 3. 8. 1930.)

Lebenslauf

Ich, Stephan Pietrkowski bin am 27. 6. 09 in Posen als Sohn des Arztes Dr. G. Pietrkowski geboren. Im April 1914 zogen meine Eltern nach Freiburg i. B., wo ich im März 1927 die Reifeprüfung des Realgymnasiums bestand. Ich studierte Mathematik und Physik und physikalische Chemie in Heidelberg, Berlin, Freiburg i. B. und zuletzt in Erlangen. In den letzten Semestern vor meiner Promotion studierte ich vornehmlich bei Prof. Dr. W. Krull und Prof. Dr. O. Haupt.